مع

سلسلة رفعة

للرياضيات متعة

أسهل

أجمل

أبسط

رياضيات

2-3

ع/2

تأليف

ندى محمد عبد العزيز الناصر

جواهر حمدان ملوح العنزي

مراجعة

هند علي محمد العديني

علي محمد عبد الله القرني

نسخة إلكترونية مجانية لا تباع

أ/ ندى محمد الناصر - أ/ جواهر حمدان العنزي

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

مع سلسلة رفعة للرياضيات متعة (رياضيات 6)

رقم الإيداع: 1442/6085 تاريخ: 1442/07/18

هـ، ورقم ردمك 978-603-03-7015-3

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين ، أما بعد:

نبذة تعريفية لمجموعة رفعَه

هي مجموعة تدار من قبل معلمي ومعلمات الرياضيات من جميع أنحاء المملكة وهي قائمة على التطوير المهني لجميع المعلمين والمعلمات ، وابتكار الأفكار الإبداعية للتعليم العام، والإنتاج الموثق لكل ما يخص الرياضيات والتعليم العام .

وبهدف التسهيل والتيسير لمادة الرياضيات ، تقدم مجموعة رفعة بين أيديكم هذا العمل ضمن " سلسلة كُتب رفعَة " وتتميز هذه الكُتب بما يلي :

- عرض المحتوى بصورة جذابة ومشوقة .
- اختبار قصير بعد كل درس (اختبر نفسك).
- ملحق للإجابات لـ (اختبر نفسك) للتأكد من صحة الحل.

ونطمح من خلاله توصيل المفاهيم الرياضية وموضوعات المنهج بصورة سلسه وواضحة ... لإفادة طلابنا وطالباتنا ، وتوفير جهود معلمينا ومعلماتنا الأفاضل .

والله ولي التوفيق

مجموعة رفعة الرياضيات

الفصل الأول

المتجهات

الفصل الثاني

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الفصل الثالث

الاحتمال والإحصاء

الفصل الرابع

النهايات والاشتقاق

1-1 مقدمة في المتجهات

الدرس | اختبر نفسك

1-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

الدرس | اختبر نفسك

1-3 الضرب الداخلي

الدرس | اختبر نفسك

1-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

الدرس | اختبر نفسك

1-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

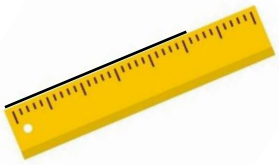
الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

الكميات الفيزيائية

كمية قياسية (عددية)

هي كمية لها مقدار فقط وليس لها اتجاه.



طول قطعة مستقيمة 5 cm

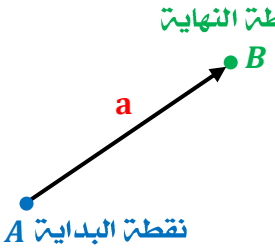
كمية متجهة

هي كمية لها مقدار و اتجاه .

يسير قارب بسرعة 15 m/h
في اتجاه الجنوب الغربي .

المتجهات

المتجه:



قطعة مستقيمة لها اتجاه أو سهم لها نقطة بداية A ولها نقطة نهاية B

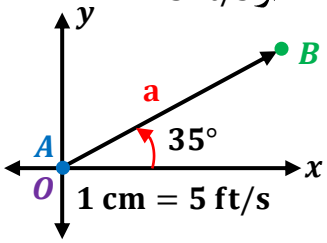
يرمز للمتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\mathbf{a}$

طول المتجه:

طول القطعة المستقيمة التي تمثله ويرمز لطول المتجه a بالرمز $|\mathbf{a}|$

مثلًا : إذا كان مقياس الرسم $1\text{ cm} = 5\text{ ft/s}$ فإن الطول يساوي 2.6×5 أو 13 ft/s

الوضع القياسي للمتجه:

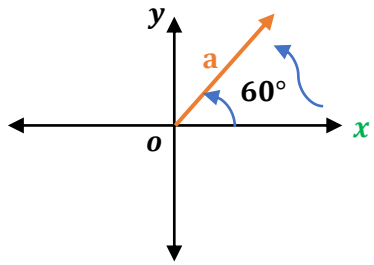
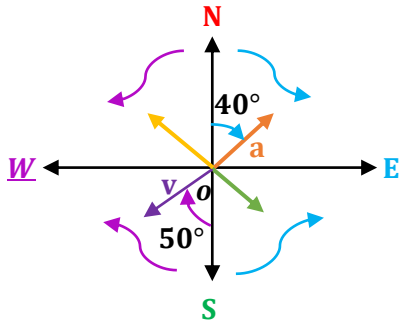
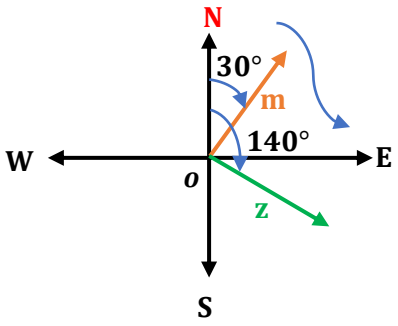


إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل.

اتجاه المتجه:

- الاتجاه الأفقي .
- الاتجاه الربعي.
- الاتجاه الحقيقي .

تمثيل المتجه هندسيًا

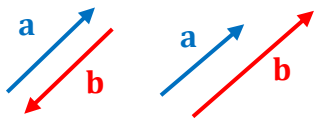
النوع	خصائصه	الرسم
الاتجاه الأفقي	يستعمل المحور الأفقي الزاوية التي يصنعها مع محور x الموجب ويكون عكس عقارب الساعة . مثال : $\vec{a}$ بزاوية قياسها $60°$ مع الاتجاه الأفقي	
الاتجاه الربعي (فاي) φ	يستعمل المحور الرأسي y إما شمالًا N أو جنوبًا S يكون قياس الزاوية بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب المحور الرأسي وتكتب الزاوية بين حرفين مثال : $\vec{a}$ باتجاه N 40° E $\vec{v}$ باتجاه S 50° W	
الاتجاه الحقيقي	يبدأ من الشمال N ويكون مع عقارب الساعة وتكتب الزاوية بثلاثة أرقام مثال : $\vec{m}$ باتجاه 030° $\vec{z}$ باتجاه 140° إذا كان قياس الزاوية ثلاث أرقام تكتب كما هي .	

أنواع المتجهات

المتجهات المتوازية

$a \parallel b$

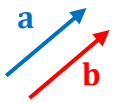
لها الاتجاه نفسه أو اتجاهان متعاكسان وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه.



المتجهات المتساوية

$a = b$

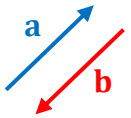
لها الاتجاه نفسه والطول نفسه .



المتجهان المتعاكسان

$a = -b$

لهما الطول نفسه واتجاهان متعاكسان.



المحصلة: هي المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر .

محصلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه

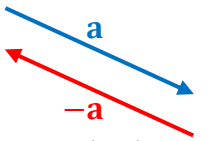
هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات ، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه .

محصلة ناتج جمع متجهين متوازيين متعاكسين

هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا .

محصلة ناتج جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه

هو المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 وطوله صفر وليس له اتجاه .



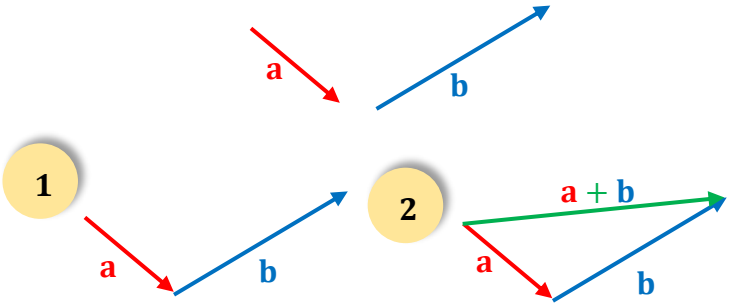
$$a + (-a) = 0$$

إيجاد المحصلة هندسيًا

قاعدة المثلث

طريقته:

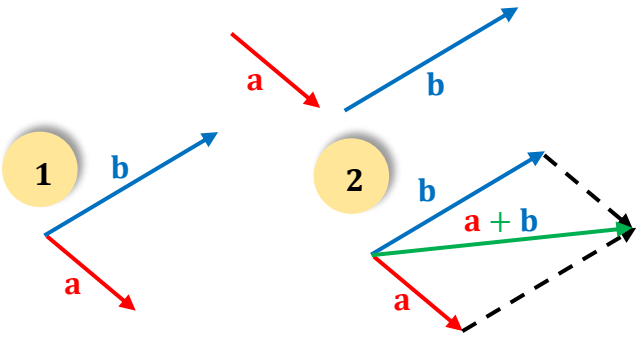
- تلتقي نقطة نهاية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- المحصلة هي المتجه المرسوم من نقطة بداية المتجه a إلى نهاية المتجه b



قاعدة متوازي الأضلاع

طريقته:

- تلتقي نقطة بداية المتجه a مع نقطة بداية المتجه b
- نكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه a, b
- المحصلة هي المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع الذي بدايته نقطة التقاء بداية المتجهين.



العمليات على المتجهات

ضرب متجه في عدد حقيقي

إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه k v هو : $|k|\,|v|$

ويتحدد اتجاهه بإشارة k

إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه .

إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v.

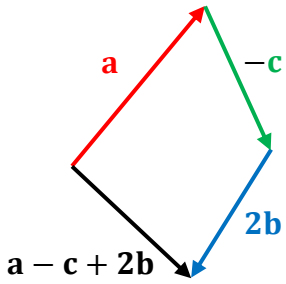
$|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k

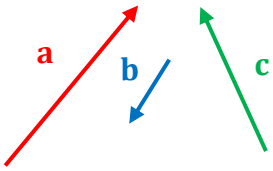
$|v|$ طول المتجه v

مثال

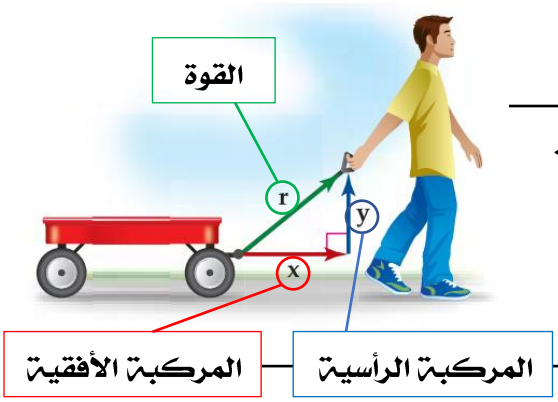
ارسم المتجه التالي :

$a - c + 2b$





المركبات المتعامدة



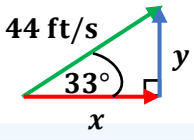
هي مركبتان متعامدتان واحدة أفقية والأخرى رأسية .

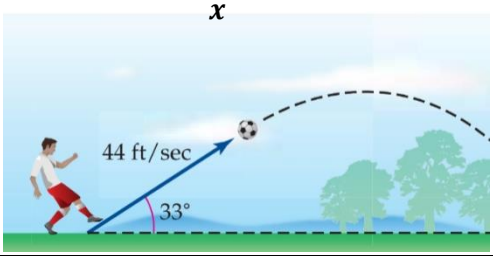
مقدار المركبة الأفقية $|x| = r\cos\theta$

مقدار المركبة الرأسية $|y| = r\sin\theta$

مثال

يركل لاعبٌ كرة قدمٍ من سطح الأرض بسرعة مقدارها $44\ ft/s$ ، وبزاوية $33°$ مع سطح الأرض.





مقدار المركبة الأفقية للسرعة $|x| = r\cos\theta$

$|x| = 44\cos 33° \approx 36.9\ ft/s$

مقدار المركبة الرأسية للسرعة $|y| = r\sin\theta$

$|y| = 44\sin 33° \approx 23.96\ ft/s$

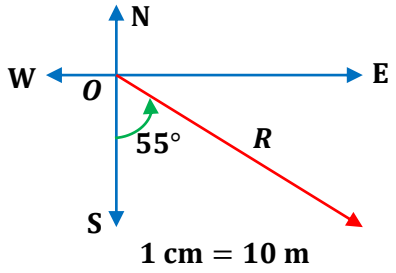
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مساحة مربع $20\ m^2$ تسمى هذي الكمية بـ

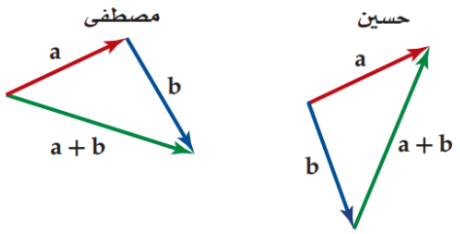
A	B	C	D
كمية قياسية	كمية متجهة	كمية مركبة	كمية قطبية

2 زاوية الاتجاه الربعي في الشكل المقابل تكتب بالصورة :



A	B	C	D
145°	S 55°E	N 55°E	055°

3 حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين في الشكل المقابل فكان:



A	B	C	D
مصطفى إجابته صحيحة	حسين إجابته صحيحة	كلاهما صحيح	كلاهما خاطئ

أكمل الفراغات التالية :

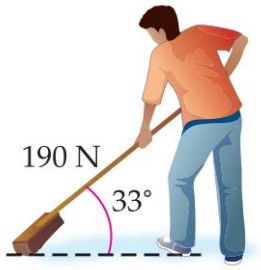
1 مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين 18 N للأمام ثم 20 N للخلف يساوي ..... واتجاهها .....

2 المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه هما المتجهان الـ.....

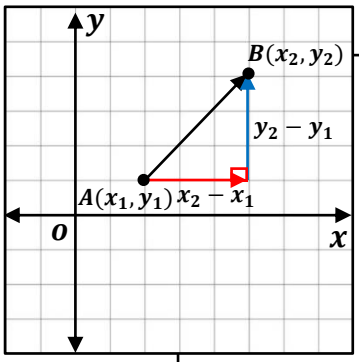
أوجد حل ما يلي:

يدفع حسن مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل.

- أوجد مقدار كل من المركبة الأفقية والراسية؟



الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$

مثال :

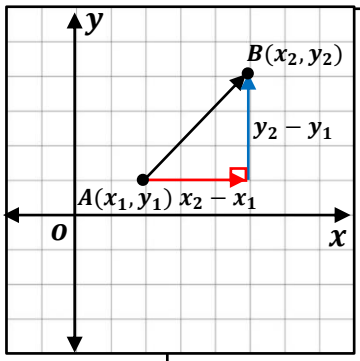
الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2 , -7)$

ونقطة نهايته $B(6 , 1)$ هي:

$$= \langle 6 - (-2), 1 - (-7) \rangle$$

$$= \langle 8 , 8 \rangle$$

طول المتجه



طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1)$

ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال :

طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2 , -7)$

ونقطة نهايته $B(6 , 1)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-7))^2}$$

$$= \sqrt{128} \approx 11.3$$

إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه هي : $\langle a , b \rangle$ فإن طوله $= \sqrt{a^2 + b^2}$

من مثال : الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB} = \langle 8 , 8 \rangle$ فإن طوله هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = \sqrt{128} \approx 11.3$$

العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

جمع متجهين	طرح متجهين	ضرب متجه في عدد حقيقي
$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$	$\mathbf{a} - \mathbf{b} =$	$k\,\mathbf{a} =$
$\langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 \rangle$	$\langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 \rangle$	$\langle k\,a_1 , k\,a_2 \rangle$

مثال

إذا كان : $\mathbf{a} = \langle 2 , 5 \rangle \ , \mathbf{b} = \langle -3 , 0 \rangle \ , \mathbf{c} = \langle -4 , 1 \rangle$

$$2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$$
$$= 2\langle -4 , 1 \rangle + 4\langle 2 , 5 \rangle - \langle -3 , 0 \rangle$$
$$= \langle -8 , 2 \rangle + \langle 8 , 20 \rangle + \langle 3 , 0 \rangle$$
$$= \langle 3 , 22 \rangle$$

متجه الوحدة

متجه طوله 1 ويرمز له بالرمز $\mathbf{u}$

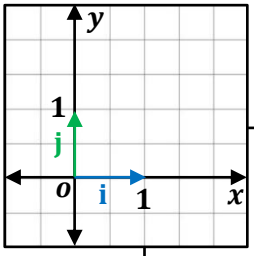
طريقة إيجاده : قسمه المتجهة على طوله . $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

مثال

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{w} = \langle 6 , -2 \rangle$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$$
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{|\langle 6 , -2 \rangle|}$$
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{\sqrt{6^2 + (-2)^2}}$$
$$= \frac{\langle 6 , -2 \rangle}{\sqrt{40}}$$
$$= \langle \frac{6}{\sqrt{40}} , \frac{-2}{\sqrt{40}} \rangle$$
$$= \langle \frac{6\sqrt{40}}{40} , \frac{-2\sqrt{40}}{40} \rangle$$ ← انطاق المقام
$$= \langle \frac{3\sqrt{10}}{10} , \frac{-\sqrt{10}}{10} \rangle$$ ← بالتبسيط

متجها الوحدة القياسيان

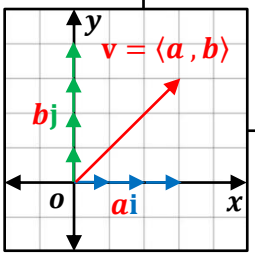


هما متجها الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x والاتجاه الموجب لمحور y

ويرمز لهما بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1 , 0 \rangle , \mathbf{j} = \langle 0 , 1 \rangle$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a , b \rangle$

بالصورة : $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$



التوافق الخطي

يقصد به كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i} , \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ توافق خطي لمتجهي الوحدة .

ملاحظة

i عدد تخيلي

$\mathbf{i}$ متجه الوحدة

مثال

اكتب المتجه $\overrightarrow{\mathbf{DE}}$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i} , \mathbf{j}$

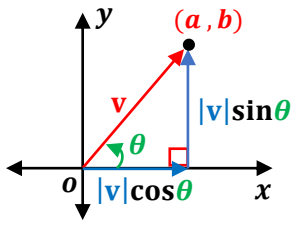
$D(-6 , 0) , E(2 , 5)$

أولًا: نكتب المتجه بالصورة الإحداثية $\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \langle 2 - (-6), 5 - 0 \rangle = \langle 8 , 5 \rangle$

ثانيًا: نعيد كتابتها كتوافق خطي $\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \langle 8 , 5 \rangle = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

إيجاد الصورة الإحداثية

الصورة الإحداثية لمتجه معطى **طوله** و **زاوية** اتجاهه مع الأفقي



طول المتجه $|\mathbf{v}|$ و الزاوية θ

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta \, , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

ويمكن كتابتها كتوافق خطي

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| (\cos\theta)\, \mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\, \mathbf{j}$$

مثال

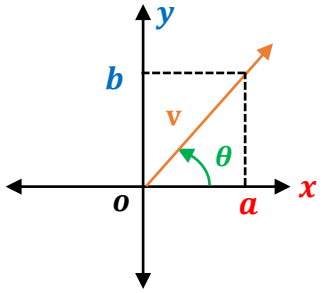
أوجد **الصورة الإحداثية** للمتجه v المعطى

طوله $|\mathbf{v}| = 8$ وزاوية الاتجاه مع الأفقي $\theta = 45°$

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta \, , |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle 8 \cos 45° \, , 8 \sin 45° \rangle = \langle 4\sqrt{2} \, , 4\sqrt{2} \rangle$$

زوايا الاتجاه للمتجهات



زاوية اتجاه المتجه مع الاتجاه الأفقي (**الموجب لمحور** x)

إذا كان المتجه $\mathbf{v} = \langle a \, , b \rangle$ وذلك بحل المعادلة : $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

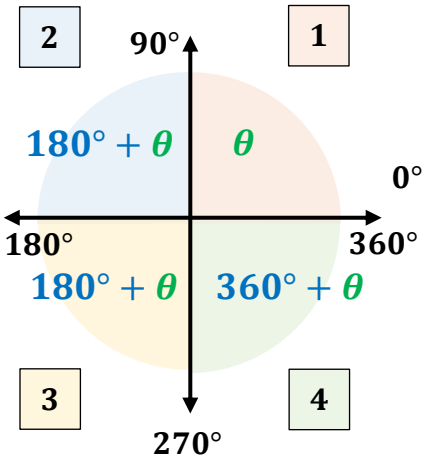
لإيجاد الزاوية

1 نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية :

- إذا كانت $\tan\theta$ موجبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.
- إذا كانت $\tan\theta$ سالبة فإن الزاوية θ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع.

لتحديد الربع بشكل أدق نستعمل قيمتي a و b حيث تؤخذ a من محور x وتؤخذ b من محور y .

2 نحدد قيمة الزاوية θ وذلك عن طريق $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$



الزاوية المطلوبة مع الاتجاه الأفقي

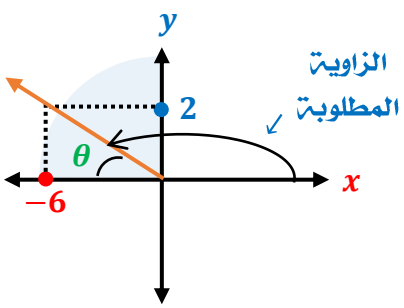
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الأول تبقى كما هي (موجبة)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثاني تكون (سالبة)
  ولإيجادها نضيف $180°$ (لأنها ستكون أقل من $180°$)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الثالث تكون (موجبة)
  ولإيجادها نضيف $180°$ (لأنها ستكون أكبر من $180°$)
- إذا كانت الزاوية θ في الربع الرابع تكون (سالبة)
  ولإيجادها نضيف $360°$ (لأنها ستكون أقل من $360°$)

مثال

أوجد زاوية المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور x :

$-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$a = -6 \ , b = 2$



$\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\tan\theta = \frac{2}{-6}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{-6}$

$\theta = -18.4°$

θ تقع في الربع الثاني

$180° + \theta$

$= 180 - 18.4$

$= 161.6°$

تطبيقات العمليات على المتجهات

إيجاد محصلة سرعة الحركة

1. نوجد متجه السرعة الأول وغالبًا يكون متجه أفقي $\mathbf{v}_1 = \langle a , 0 \rangle$
2. نوجد الصورة الإحداثية لمتجه السرعة الثاني والذي مقداره $\mathbf{v}_2$ وزاوية اتجاهه θ
$$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2| \cos\theta \ , |\mathbf{v}_2| \sin\theta \rangle$$
3. نوجد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a , b \rangle$
4. نوجد محصلة السرعتين باستخدام قانون طول المتجه
$$\mathbf{v} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

إيجاد اتجاه الحركة

1. بعد إيجاد مجموع المتجهين $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \langle a , b \rangle$
2. $$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(2,-7)$ ونقطة نهايته $B(-6,9)$ هي :

A	B	C	D
$\langle -8,-16\rangle$	$\langle -8,16\rangle$	$\langle 8,16\rangle$	$\langle 16,8\rangle$

2 إذا كان $h=\langle -6\ ,2\rangle, g=\langle -3\ ,-5\rangle, f=\langle 8\ ,0\rangle$ فإن $2f+g-3h$ تساوي :

A	B	C	D
$\langle -31\ ,11\rangle$	$\langle -31\ ,-11\rangle$	$\langle 31\ ,-11\rangle$	$\langle 30\ ,12\rangle$

3 عند كتابة $\overrightarrow{DE}$ الذي نقطة بدايته $D(4,-1)$ ونقطة نهايته $E(5,-7)$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة j , i تصبح :

A	B	C	D
$\mathbf{i}-6\mathbf{j}$	$\mathbf{i}-5\mathbf{j}$	$\mathbf{i}-\mathbf{j}$	$\mathbf{i}+6\mathbf{j}$

4 الصورة الإحداثية للمتجه v الذي طوله $|\mathbf{v}|=16$ وزاوية اتجاهه $\theta=330°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x هي:

A	B	C	D
$\langle 8\sqrt{3},6\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},8\rangle$	$\langle \sqrt{3},-8\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},-8\rangle$

أكمل الفراغات التالية :

1 طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3,1)$ ونقطة نهايته $B(4,5)$ يساوي .....

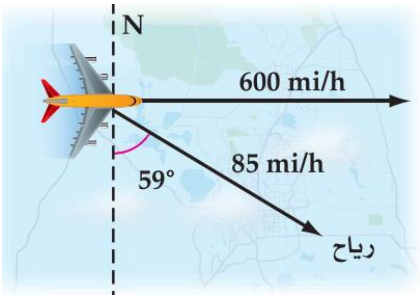
2 متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v}=\langle 1,7\rangle$ هو .....

3 زاوية اتجاه المتجه $-4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ مع الاتجاه الموجب للمحور x تساوي .....

أوجد حل ما يلي:

تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E

- أوجد محصلة سرعة الطائرة.
- أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة



الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 \rangle$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ ⟵ الناتج يكون عدداً وليس متجهًا

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

مثال

$\mathbf{u} = \langle -2 , -3 \rangle , \mathbf{v} = \langle 9 , -6 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -2(9) + (-3)(-6)$

$= 0$

$\mathbf{u} = \langle 3 , -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -5 , 1 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-5) + (-2)(1)$

$= -17$

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w}$ متجهات

وكان k عدد حقيقي

1 — **الخاصية الإبدالية**

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

2 — **خاصية الضرب في عدد حقيقي**

$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) =$

$k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

3 — **خاصية التوزيع**

$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

4 — **خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري**

$0 \cdot \mathbf{u} = 0$

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2$$

5

مثال

استعمل الضرب الداخلي لإيجاد طول المتجه $\mathbf{c}=\langle -1,-7\rangle$

بما أن : $|c|^2=c\cdot c$ فإن : $|\mathbf{c}|=\sqrt{\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}}$

$$|\mathbf{c}|=\sqrt{(-1,-7)\cdot(-1,-7)}$$

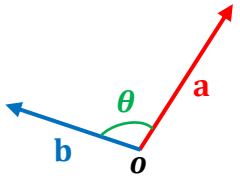
$$|\mathbf{c}|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=7.07$$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}\,,\mathbf{b}$ فإن :

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



إذا كانت الزاوية بين المتجهين $90°$ فإنهما **متعامدان** .

إذا كانت الزاوية بين المتجهين $0°$ أو $180°$ فإنهما **متوازيان** .

مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}\,,\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}=\langle -5,-2\rangle\,,\mathbf{v}=\langle 4,4\rangle$$

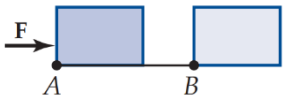
$$\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{-5(4)+(-2)4}{\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}\sqrt{4^2+4^2}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{-28}{\sqrt{29}\sqrt{32}}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{-28}{4\sqrt{58}}=156.8°$$

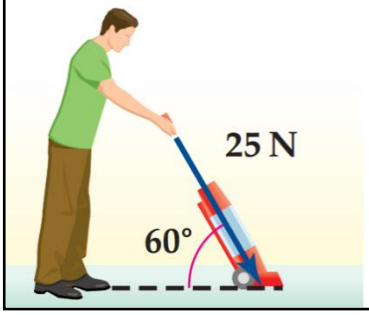
الشغل



مقدار القوة المؤثرة في جسم لتحركيه مضروبًا في المسافة المتجهة التي تحركها .

$$W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$$

مثال



يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N ، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m

$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

1 الصورة الإحداثية للقوة المتجه F بدلالة مقدار القوة ، وزاوية الاتجاه هي :

$$\mathbf{F} = \langle 25\cos 60° , 25\sin 60° \rangle$$

$$\mathbf{F} = \langle 12.5 , 21.6 \rangle$$

2 الصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 6 , 0 \rangle$$

3

$$W = F.\overrightarrow{AB}$$

$$W = \langle 12.5 , 21.6 \rangle \cdot \langle 6 , 0 \rangle$$

$$W = 75 + 0 = 75 \text{ J}$$

وحدات الشغل في النظام المتري نيوتن- متر أو جول

طريقة أخرى مختصرة

$$W = d\,.F.\cos\theta$$

$$d = 6 \ , \quad F = 25 \ , \quad \theta = 60°$$

$$W = 6\,(25)\cos 60°$$

$$W = 75 \text{ J}$$

اختبر نفسك

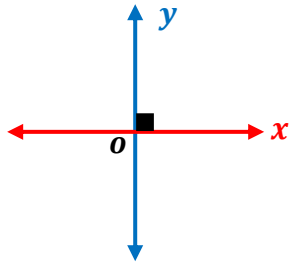
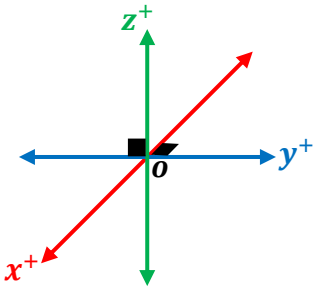
اختر الإجابة الصحيحة :							
1	حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $u = \langle 4, -4\rangle, v = \langle 7, 5\rangle$ هو :						
	A	8	B	10	C	-8	D	6
2	طول المتجه $r = \langle -9, -4\rangle$ هو :						
	A	9.8	B	8.9	C	8.5	D	5.8
3	المتجهان $u = 11i + 7j , v = -7i + 11j$:						
	A	متوازيان	B	متساويان	C	متعامدان	D	متعاكسان
أكمل الفراغات التالية :							
1	الزاوية θ بين المتجهين $u = \langle 7, 10\rangle , v = \langle 4, -4\rangle$ تساوي تقريبًا						
2	المتجه الذي يعامد المتجه $\langle 7, -4\rangle$ هو						

أوجد حل ما يلي:

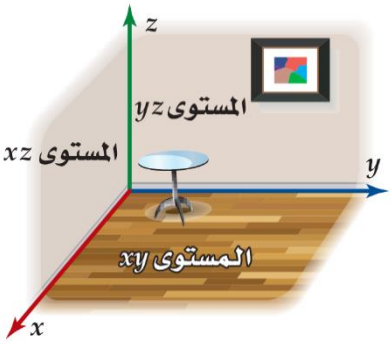
يدفع طارق برميلًا على أرض مستوية مسافة 1.5m بقوة مقدارها 534 N بزاوية $25°$.

- أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق وقرب الناتج الى أقرب عدد صحيح .

الفرق بين نظام المستوى الإحداثي و نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد

المستوى الإحداثي	نوع النظام	المستوى الثلاثي الأبعاد
2	عدد المحاور	3
يتشكل بواسطة خطي أعداد متعامدين هما المحور x والمحور y	المحاور	يتشكل بواسطة ثلاثة خطوط متعامدة هي المحور x والمحور y والمحور z
يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0,0)$	نقطة التقاطع	تتقاطع في نقطة تسمى نقطة الأصل $(0,0,0)$
مستويان تقسم المستوى إلى أربع مناطق يسمى كل منها الربع .	شكلها	ثلاث مستويات تقسم الفضاء إلى ثماني مناطق يسمى كل منها الثمن .
تحديد وتعيين نقاط في المستوى .	يسمح هذا النظام بـ	تحديد وتعيين نقاط في الفضاء.
(x,y)	الإحداثيات	(x,y,z)
	التمثيل البياني	

الثمن



الشكل المجاور يمثل الثمن في الفضاء الثلاثي الأبعاد

وهو الجزء الظاهر من الغرفة .

الثلاثي المرتب

وهو شكل كتابة النقطة في الفضاء (x,y,z) حيث أنها أعداد حقيقية .

مثال : $(2,4,-6)$

تعيين نقطة في الفضاء

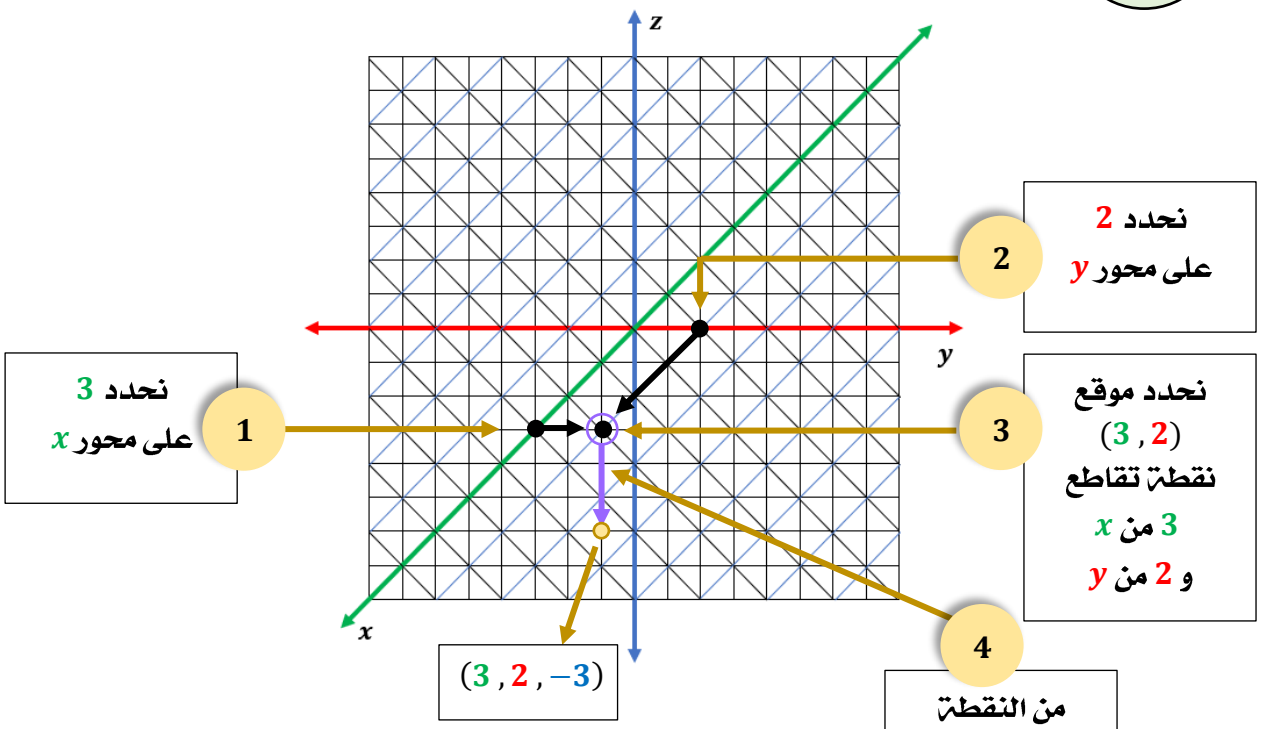
لتكن النقطة (x, y, z)

1 عين النقطة (x, y) في المستوى xy

2 تحرك لأعلى إذا كانت قيمة z موجبة أو إلى أسفل إذا كانت قيمة z سالبة باتجاه موازي لمحور z

مثال

عين النقطة $(3, 2, -3)$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :



المرفقات

المسافة بين نقطتين في الفضاء

يشبه قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

$A(x_1 , y_1 , z_1) , B(x_2 , y_2 , z_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

نقطة المنتصف في الفضاء

يشبه قانون نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$A(x_1 , y_1 , z_1) , B(x_2 , y_2 , z_2)$

نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} , \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

المتجهات في الفضاء

تشبه المتجهات في المستوى الإحداثي

المتجه في الوضع القياسي $\mathbf{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$

المتجه الصفري $\mathbf{0} = \langle 0 , 0 , 0 \rangle$

متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية :

$\mathbf{i} = \langle 1 , 0 , 0 \rangle , \mathbf{j} = \langle 0 , 1 , 0 \rangle , \mathbf{k} = \langle 0 , 0 , 1 \rangle$

يمكن التعبير عن المتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}$:

$$\mathbf{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$$

تعيين متجه في الفضاء

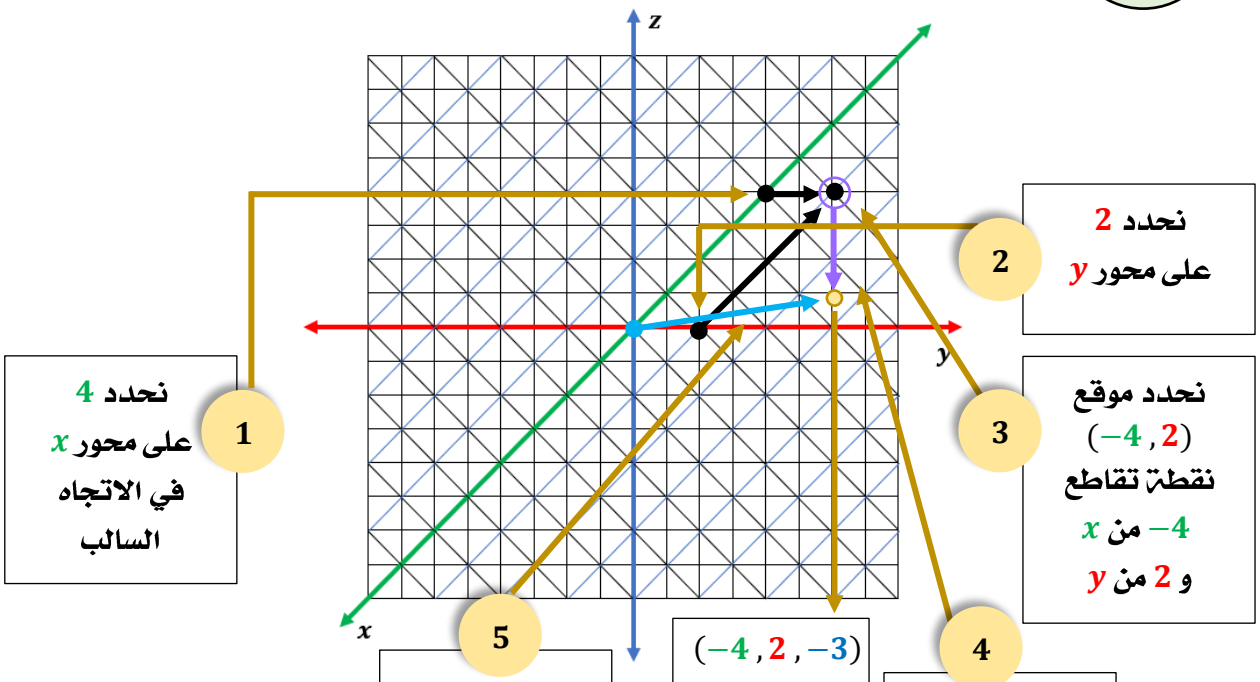
ليكن المتجه $\mathbf{v} = \langle x , y , z \rangle$

1 عين النقطة (x , y , z) بالطريقة السابقة.

2 المتجه v بيانيًا وذلك بأن تكون نقطة الأصل هي نقطة البداية والنقطة (x , y , z) هي نقطة النهاية.

مثال

عين المتجه $\mathbf{u} = \langle -4 , 2 , -3 \rangle$ في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :



المرفقات

العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ متجهين و k عدد حقيقياً، فإن :

خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1 , a_2 - b_2 , a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1 , ka_2 , ka_3 \rangle$

التعبير عن المتجهات في الفضاء يشبه المستوى الإحداثي

الصورة الإحداثية لمتجه في الفضاء

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

طول المتجه في الفضاء

طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1 , y_1 , z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2 , y_2 , z_2)$ هو:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

متجه الوحدة في الفضاء

متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

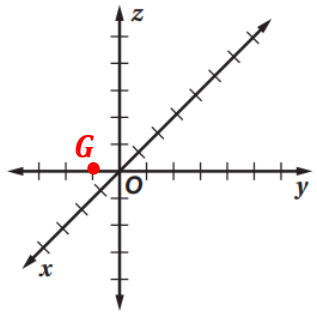
1 طول القطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها $(-4, 10, 4)$ ونقطة نهايتها $(1, 0, 9)$ تساوي :

A		B		C		D	
10.75		12.25		13.25		10	

2 إذا كانت $M(3, 4, 5), N(\frac{7}{2}, 1, 2)$ وكانت N منتصف $\overline{MP}$ فإن إحداثيات النقطة P هي :

A		B		C		D	
$(3, 4, 5)$		$(\frac{7}{2}, 1, 2)$		$(4, -2, -1)$		$(4, 1, -1)$	

3 إحداثيات النقطة G في المستوى الثلاثي الأبعاد هي:



A		B		C		D	
$(0, -1, 5)$		$(-3, -3, -2)$		$(0, 1, 0)$		$(3, 2, 1)$	

أكمل الفراغات التالية :

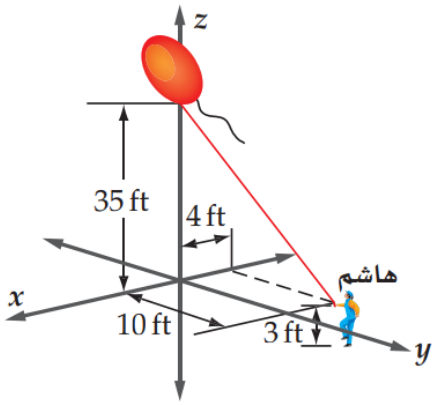
1 إذا كانت $A(3, 5, 1)$ نقطة بداية القطعة المستقيمة و$B(0, 0, -9)$ نقطة النهاية فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو : .....

2 إذا كان $a = \langle -5, -4, 3 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle, c = \langle -2, 2, 4 \rangle$ ، فإن $6a - 7b + 8c$ تساوي .....

أوجد حل ما يلي:

تطوع هاشم لحمل بالون كدليل في استعراض رياضي .
إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الارض ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض كما في الشكل أدناه .

- أوجد طول الحبل إلى أقرب قدم.



الضرب الداخلي في الفضاء

الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ⟵ الناتج يكون عددًا وليس متجهًا

المتجهان متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

يساوي صفر

المتجهان غير متعامدان

إذا كان حاصل الضرب الداخلي

لا يساوي صفر

مثال

$\mathbf{u} = \langle 3 , -5 , 4 \rangle , \mathbf{v} = \langle 5 , 7, 5 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(5) + (-5)7 + 4(5)$

$= 0$

$\mathbf{u} = \langle 4 , -2 , -3 \rangle , \mathbf{v} = \langle 1 , 3, -2 \rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4(1) + (-2)3 + (-3)(-2)$

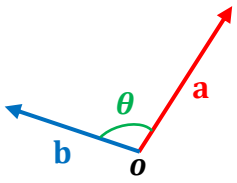
$= 4$

الزاوية بين المتجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a} , \mathbf{b}$ فإن :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}$$



مثال

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$:

$\mathbf{u} = \langle -4 , 2 , 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4 , 0 , 3 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-4(4) + 2(0) + 1(3)}{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (1)^2}\ \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (3)^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{\sqrt{21}\ \sqrt{25}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-13}{5\sqrt{21}} = 124.6°$$

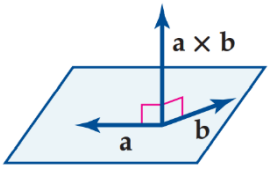
الضرب الاتجاهي

الضرب الاتجاهي لمتجهين a , b هو متجه وليس عددًا

ويرمز له بالرمز $a \times b$ ($\times$ تقرأ cross)

ويكون المتجه الناتج عموديًا على المستوى الذي يحوي المتجهين a , b

يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في النظام ثلاثي الأبعاد فقط.



الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان : $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين a , b هو المتجه :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

يكون الضرب الاتجاهي $u \times v$ عموديًا على كلًا من المتجهين u , v

إذا كان حاصل الضرب الداخلي لـ $u \times v$ مع كلًا من المتجهين يساوي صفرًا.

مثال

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين u , v : $u = \langle 4 , 2 , -1 \rangle , v = \langle 5 , 1 , 4 \rangle$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

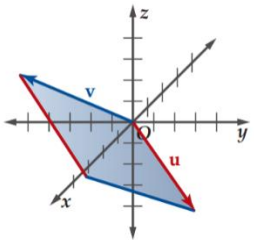
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2(4) - (-1)(1))\mathbf{i} - (4(4) - (-1)(5))\mathbf{j} + (4(1) - 2(5))\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (8 + 1)\mathbf{i} - (16 + 5)\mathbf{j} + (4 - 10)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 9\,\mathbf{i} - 21\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$$

تطبيقات هندسية للضرب الاتجاهي



مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران

هو طول $u \times v$ أي مقدار المتجه $|u \times v|$

مثال

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه :

$u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

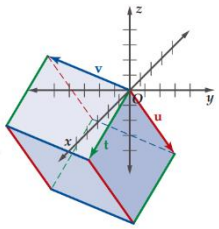
$$u \times v = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$u \times v = -11\,i + 18\,j - 10\,k$$

$$|u \times v| = \sqrt{(-11)^2 + (18)^2 + (-10)^2}$$

$$|u \times v| = \sqrt{545} = 23.3$$

مساحة متوازي الأضلاع تساوي 23.3 وحدة مربعة



متوازي السطوح : هو مجسم ثلاثي الأبعاد في الفضاء ، له ستة أوجهٍ ، كل منها على شكل متوازي أضلاع .

حجم متوازي السطوح : هو القيمة المطلقة للضرب القياسي الثلاثي .

إذا كان : $t = t_1 i + t_2 j + t_3 k$, $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات t , u , v :

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه :

$t = 2j - 5k$, $u = -6i - 2j + 3k$, $v = 4i + 3j + k$ أحرف متجاورة .

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (0) - \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (2) + \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} (-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = -10\,(0) + 18(2) + (-10)(-5)$$

$$t \cdot (u \times v) = 36 + 50 = 86$$

حجم متوازي السطوح يساوي 86 وحدة مكعبة

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1. حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $u = \langle 5, 0, -4 \rangle, v = \langle 6, -1, 4 \rangle$ هو :

A		B		C		D	
-14		-12		12		14	

2. مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $u = \langle -9, 1, 2 \rangle, v = \langle 6, -5, 3 \rangle$ حيث ان u, v ضلعان متجاوران :

A		B		C		D	
$13\sqrt{19}$		$13\sqrt{16}$		$13\sqrt{15}$		$\sqrt{19}$	

3. إذا كان $v = \langle -4, 4, 5 \rangle, u = \langle 3, 2, -2 \rangle$ فإن $u.(u \times v)$ تساوي :

A		B		C		D	
غير ممكن		2		1		0	

أكمل الفراغات التالية :

1. الضرب الاتجاهي للمتجهين $u = \langle -1, 3, 5 \rangle, v = \langle -2, -6, -3 \rangle$ هو .....

2. حجم متوازي السطوح الذي فيه t, u, v أحرف متجاورة وحيث $v = \langle -9, 5, -4 \rangle$
$t = \langle 2, -3, -1 \rangle, u = \langle 4, -6, 3 \rangle$ يساوي .....

أوجد حل ما يلي:

إذا كان $v = \langle -8, -9, 5 \rangle, u = \langle 6, -5, 1 \rangle$

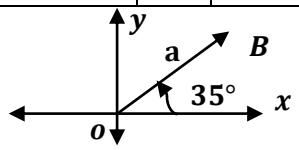
- أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u , v ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1 أي الكميات التالية كمية متجهة ؟

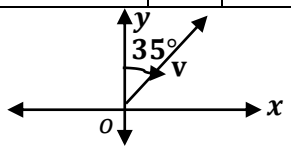
A	الزمن	B	المسافة	C	الإزاحة	D	الكتلة

2 في الشكل : قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه ..



A	35°	B	035°	C	055°	D	090°

3 في الشكل المجاور : الاتجاه الربعي للمتجه ....



A	N 35° E	B	N 55° E	C	W 55° S	D	N 35° W

4 إذا كان اتجاه متجه $120°$ ، فإن اتجاهه الربعي ....

A	N 30° W	B	N 30° E	C	N 60° W	D	N 60° E

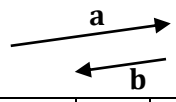
5 إذا كان اتجاه متجه $180°$ ، فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي ...

A	90°	B	180°	C	270°	D	300°

6 إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه $155°$ ، فإن اتجاهه الربعي ..

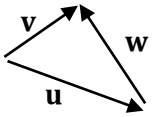
A	N 55° E	B	S 25° E	C	W 55° S	D	N 35° E

7 في الشكل المجاور : أي الخيارات التالية تمثل العلاقة بين المتجهين a , b



A	متوازيان	B	متساويان	C	a معكوس لـ b	D	متطابقان

8 في الشكل المجاور : المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين هو .....



A	v	B	u	C	w	D	w + v

9 تسير باخرة بزاوية قيمتها $60°$ مع الأفقي وبسرعة $100\ km/h$ ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة ؟

A	50 km/h	B	$50\sqrt{3}$ km /h	C	200 km/h	D	$200\sqrt{3}$ km/h

10 أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟

A	$\langle 2 , 4\rangle$	B	$\langle \sqrt{5} , 1\rangle$	C	$\langle 3\sqrt{3} , 3\rangle$	D	$\langle 2 , \sqrt{3}\rangle$

11 إذا كان لدينا المتجهين $B = \langle 1 , 4\rangle , A = \langle 5 , -3\rangle$ فإن : $2A - B$

A	$\langle 9 , -10\rangle$	B	$\langle 6 , 1\rangle$	C	$\langle 4 , -7\rangle$	D	$\langle -3 , 11\rangle$

12 متجه الوحدة u باتجاه المتجه $v = \langle 3 , -4\rangle$ يساوي ...

A	$\langle -1 , 0\rangle$	B	$\langle 1 , -1\rangle$	C	$\langle -\frac{3}{5} , \frac{4}{5}\rangle$	D	$\langle \frac{3}{5} , \frac{-4}{5}\rangle$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :								
13	المتجه $v = 5i - 2j$ بالصورة الإحداثية يساوي ..							
	A	$\langle 5 , 2 \rangle$	B	$\langle 2 , 5 \rangle$	C	$\langle 5 , -2 \rangle$	D	$\langle -2 , 5 \rangle$
14	ما الصورة الإحداثية لمتجه v طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $210°$							
	A	$\langle 7 , 7\sqrt{3} \rangle$	B	$\langle -7\sqrt{3} , -7 \rangle$	C	$\langle -7\sqrt{3} , 7 \rangle$	D	$\langle 14 , 210 \rangle$
15	إذا كان $v = \langle 5 , 7 \rangle , u = \langle 3 , -2 \rangle$ فإن : $u . v$ يساوي							
	A	-14	B	-1	C	1	D	15
16	إذا كان المتجهان $v = \langle 3 , k \rangle , u = \langle 1 , -2 \rangle$ متعامدين فما قيمة k ؟							
	A	-2	B	$-\frac{3}{2}$	C	$\frac{3}{2}$	D	2
17	ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3 , 3 \rangle , \langle 2 , 0 \rangle$							
	A	$30°$	B	$45°$	C	$120°$	D	$135°$
18	أي مما يلي يمثل المتجه $\overrightarrow{AB}$ ، إذا كان $B(-5 , 2 , 1) , A(3 , 4 , -4)$ ؟							
	A	$\langle -8 , -2 , 5 \rangle$	B	$\langle 8 , -2 , -3 \rangle$	C	$\langle 8 , 2 , -3 \rangle$	D	$\langle -8 , -2 , -3 \rangle$
19	طول المتجه $w = 5i + 3j - \sqrt{2}k$ يساوي							
	A	$8 - \sqrt{2}$	B	6	C	$8 + \sqrt{2}$	D	$4\sqrt{2}$
20	إذا كان $v = \langle -2 , -1 , 3 \rangle , u = \langle b , -3 , 1 \rangle$ ، فما قيمة b التي تجعل المتجهين u , v متعامدين ؟							
	A	-6	B	-3	C	3	D	6
21	بعد عدة دقائق من إطلاق بالونين يحويان هواءً ساخنًا في الهواء كانت إحداثيات البالونين هي $B(-30 , 15 , 10) , A(20 , 25 , 30)$. أوجد المسافة بين البالونين في تلك اللحظة.							
	A	$10\sqrt{30}$	B	$30\sqrt{10}$	C	300	D	3000
22	أوجد $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$							
	A	$2i + j + 4k$	B	$-2i + j - 4k$	C	$2i - j + 4k$	D	$-2i - j - 4k$
23	إذا كان $v = \langle 2 , 0 , -1 \rangle , u = \langle 1 , -2 , 0 \rangle$ متجهين ، فإن $u \times v$ يساوي							
	A	$2i + j + 4k$	B	$-2i + j - 4k$	C	$2i - j + 4k$	D	$-2i - j - 4k$
24	متوازي أضلاع فيه $u = 7i + 2j - 2k$ و $v = 4i + 3j - k$ ، ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة ؟							
	A	13	B	21	C	$\sqrt{186}$	D	$\sqrt{458}$
25	حجم متوازي السطوح الذي فيه $u = -6i - 2j + 3k$ و $v = 4i + 3j - k$ و $t = 2j - 5k$. أحرف متجاورة يساوي ..... وحدة تكعيبية .							
	A	31	B	62	C	73	D	86

الفصل الأول
ملحق الإجابات

2-1 الإحداثيات القطبية

الدرس | اختبر نفسك

2-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

الدرس | اختبر نفسك

2-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

الدرس | اختبر نفسك

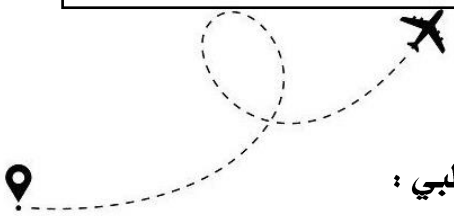
أسئلة تحصيلي

نظام الإحداثيات القطبية (المستوى القطبي)

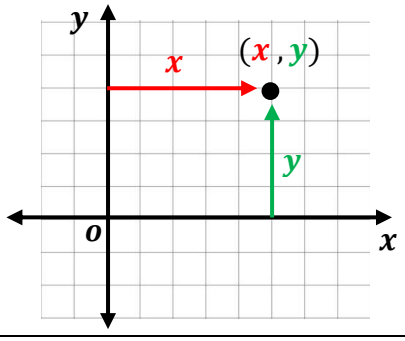
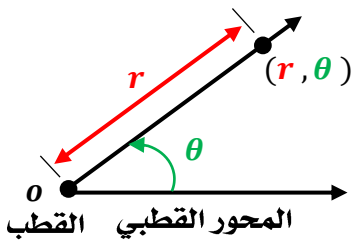
هو نظام يستخدم المسافات والزوايا لتحديد المواقع .

مثال

يحدد مراقبو الحركة الجوية موقع الطائرة باستعمال نظام الإحداثيات القطبية .



الفرق بين نظام المستوى الديكارتي والمستوى القطبي :

المستوى الديكارتي	النظام	المستوى القطبي
نقطة الأصل $o\ (0\ ,0)$	نقطة التقاطع	القطب $o\ (0\ ,0)$
المحوران $x\ ,y$ المحور الأفقي x المحور الرأسي y	المحاور	المحور القطبي نصف مستقيم يمتد أفقيًا من القطب إلى اليمين
$(x\ ,y)$	الإحداثيات	$(r\ ,\theta)$ r المسافة المتجهة من القطب إلى النقطة . θ الزاوية المتجهة من المحور القطبي إلى ضلع الانتهاء.
يعبر عنها بزوج وحيد $(x\ ,y)$	عدد الاحداثيات	لها تمثيلات متعددة
يأخذ شكلًا مستطيلًا	شكل المستوى	يأخذ شكلًا دائريًا
	التمثيل	

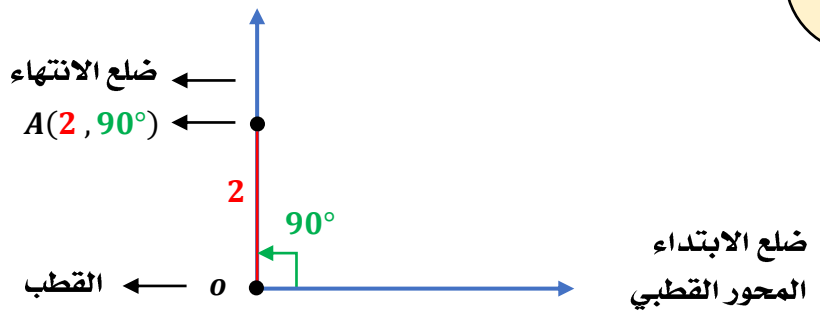
تمثيل الإحداثيات القطبية

لتكن النقطة $A(r\,,\theta)$

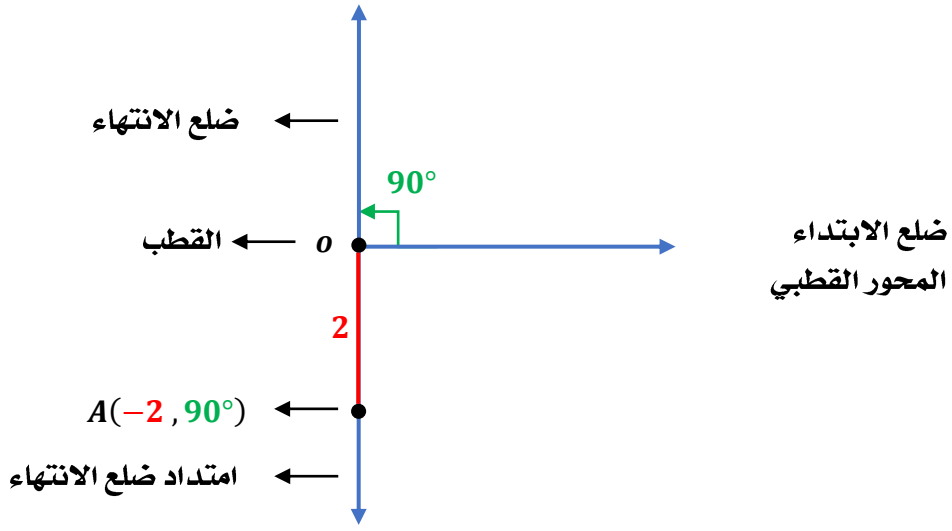
1. نرسم ضلع الابتداء (المحور القطبي)
2. باستعمال المنقلة نحدد الزاوية θ
3. نرسم ضلع الانتهاء ونأخذ من هذا الضلع مقدار r كطول له .

مثال

مثل النقطة $A(2\,,90°)$ في المستوى القطبي :

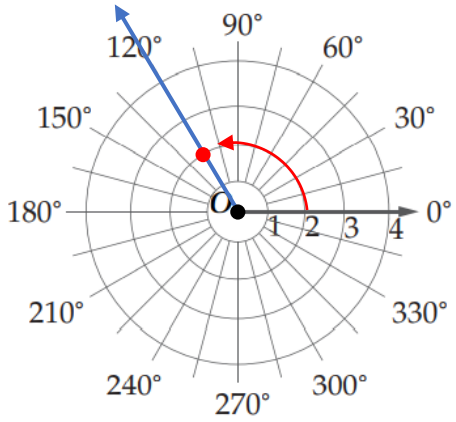


إذا كانت النقطة $A(-2\,,90°)$ أي أن r سالبة فتكون على امتداد ضلع الانتهاء
أي في الاتجاه المقابل لضلع الانتهاء.



تمثيل نقاط في المستوى القطبي

مثل النقطة $R(2\ ,120°)$ في المستوى القطبي :



تمثل $r = 2$ عدد الدوائر

تمثل $\theta = 120°$ بخط الزاوية.

يكون الاتجاه عكس عقارب الساعة

لأن الزاوية موجبة

نقطة التلاقي هي النقطة المطلوبة .

- إذا كانت الزاوية موجبة الاتجاه يكون عكس اتجاه الساعة .
- إذا كانت الزاوية سالبة الاتجاه يكون مع اتجاه الساعة .
- إذا كانت r موجبة تكون على خط الانتهاء .
- إذا كانت r سالبة تكون على امتداد خط الانتهاء في الجهة المقابلة.

تمثيلات قطبية متعددة

إذا كان n عددًا صحيحًا ، فإنه يمكن تمثيل النقطة $(r\ ,\theta)$ بالإحداثيات $(r\ ,\theta + 360°n)$ أو $(-r\ ,\theta + (2n+1)180°)$.

وبالمثل ، إذا كانت θ مقيسة بالراديان ، وكان n عددًا صحيحًا ، فإنه يمكن تمثيل النقطة $(r\ ,\theta)$ بالإحداثيات $(r\ ,\theta + 2n\pi)$ أو $(-r\ ,\theta + (2n+1)\pi)$.

إذا كانت الفترة $-360° \le \theta \le 360°$ فإنه يمكن إيجاد الأزواج المختلفة التالية:

$(r\ ,\theta - 360°)$ $(-r\ ,\theta + 180°)$ $(-r\ ,\theta - 180°)$

لابد من التأكد أن الزاوية تقع في الفترة المحددة

مثال

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة: $(4\ ,135°)$

$(4\ ,135° - 360°) = (4\ ,-225)$

$(-4\ ,135° + 180) = (-4\ ,315°)$

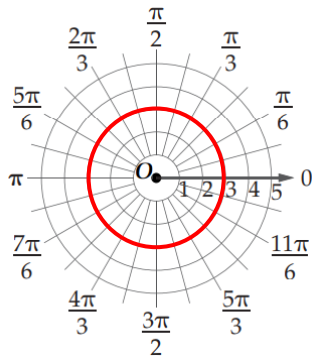
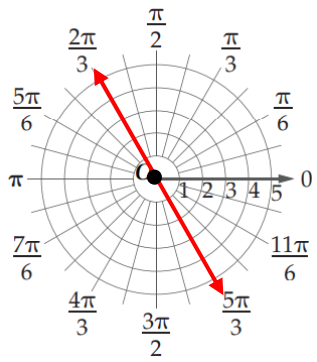
$(-4\ ,135° - 180) = (-4\ ,-45°)$

المرفقات

المعادلة القطبية هي المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية.

التمثيل القطبي هو مجموعة كل النقاط $(r\ ,\theta)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

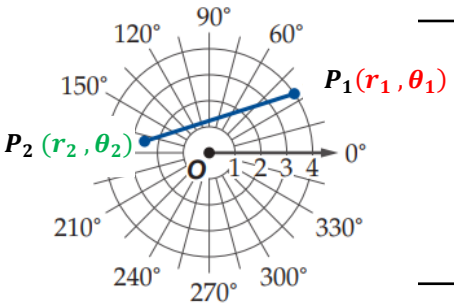
التمثيل البياني للمعادلات القطبية

دائرة	النوع	مستقيم
$r = k$	المعادلة	$\theta = h$
دائرة نصف قطرها k	ماذا تمثل ؟	مستقيم يصنع زاوية مقدارها h مع المحور القطبي أو يميل بمقدار h
$r = 3$	مثال	$\theta = \frac{2\pi}{3}$
	التمثيل البياني	

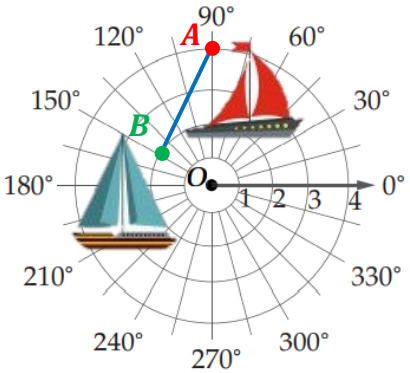
المسافة بالصيغة القطبية

إذا كان $P_1(r_1\ ,\theta_1)$ ، $P_2\ (r_2\ ,\theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي فإن المسافة P_1P_2 هي :

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\ \cos\ (\theta_2 - \theta_1)}$$



مثال يرصد رادار بحري حركة قاربين ، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $B(2\ ,150°)$ ، $A(4\ ,90°)$ حيث r بالأميال.



$$AB = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2\ \cos\ (\theta_2 - \theta_1)}$$

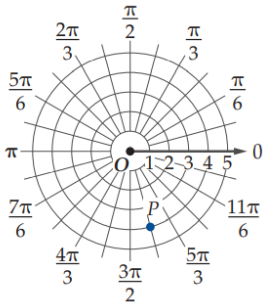
$$= \sqrt{4^2 + 2^2 - 2(4)(2)\ \cos\ (150° - 90°)}$$

$$\approx 3.5\ \text{mi}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 جميع الإحداثيات التالية صحيحة للنقطة P في المستوى القطبي ماعدا .....

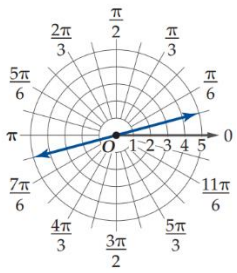


A	$\left(-4, \frac{\pi}{12}\right)$	B	$\left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$	C	$\left(4, -\frac{5\pi}{12}\right)$	D	$\left(4, \frac{19\pi}{12}\right)$

2 إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$ فإن الزوج الآخر من الإحداثيات القطبية للنقطة $(5, 960°)$

A	$(-5, 60°)$	B	$(5, 60°)$	C	$(5, 90°)$	D	$(-5, 30°)$

3 معادلة التمثيل القطبي للشكل المجاور هي .....



A	$\theta = \frac{\pi}{4}$	B	$\theta = \frac{\pi}{9}$	C	$\theta = \frac{\pi}{12}$	D	$\theta = \frac{19\pi}{12}$

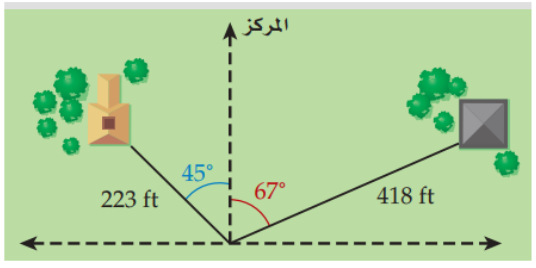
أكمل الفراغات التالية :

1. نقطة الأصل في النظام الديكارتي يقابلها ..... في النظام القطبي.
2. المعادلة $r = 2$ تمثيلها يكون على شكل .....

أوجد حل ما يلي:

أراد مساح تحديد حدود قطعة أرض ، فحدد أثرًا يبعد 223 ft بزاوية 45° إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بعد 418 ft ، بزاوية 67° إلى يمين المركز ، كما في الشكل أدناه .

- أوجد المسافة بين الأثرين .



تحويل الإحداثيات

التحويل من صورة قطبية إلى صورة ديكارتية

$(r\,,\theta) \rightarrow (x\,,y)$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$(x\,,y) = (r\cos\theta\,,r\sin\theta)$

مثال :

$(4\,,60°)$

$(4\cos 60°\,,4\sin 60°)$

$\left(2\,,2\sqrt{3}\right)$

التحويل من صورة ديكارتية إلى صورة قطبية

$(x\,,y\,) \rightarrow (r\,,\theta)$

x

$x > 0$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال :

$(8\,,10)$

$r = \sqrt{8^2 + 10^2}$

$r = 12.8$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{8}\right)$

$\theta \approx 51.3°$

$(12.8\,,51.3°)$

$x < 0$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال :

$(-9\,,-4)$

$r = \sqrt{(-9)^2 + (-4)^2}$

$r = 9.8$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-9}\right) + 180°$

$\theta \approx 204°$

$(9.8\,,204°)$

$x = 0$

$y < 0$

$\theta = \frac{-\pi}{2}$

$r = |y|$

$y > 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$r = |y|$

مثال :

$(0\,,-173)$

$y < 0$

$r = |-173| = 173$

$\theta = -\frac{\pi}{2} = -90°$

$(173\,,-90°)$

المعادلات القطبية والديكارتية

تحويل المعادلات القطبية إلى الديكارتية

نستبدل x بـ $r\cos\theta$

و نستبدل y بـ $r\sin\theta$

ونبسط .

مثال :

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$$
$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$$
$$r^2(\cos 2\theta) = 1$$
$$r^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$$
$$r^2 = \sec 2\theta$$

تحويل المعادلات الديكارتية إلى القطبية

1

مستقيم

$\theta = h$

-نأخذ tan للطرفين

-نستبدل $\tan\theta$ بـ $\frac{y}{x}$

-نضرب الطرفين في الوسطين ثم نوجد y

مثال :

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$
$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$$
$$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$$
$$y = \sqrt{3}\,x$$

2

دائرة

$r = k$

-نربع الطرفين

-نستبدل r^2 بـ $x^2 + y^2$

مثال :

$$r = -3$$
$$r^2 = (-3)^2$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

3

$r = \sin\theta$ أو $r = \cos\theta$

-نضرب الطرفين بـ r

-نستبدل r^2 بـ $x^2 + y^2$

-نعوض عن x بـ $r\cos\theta$

ونعوض عن y بـ $r\sin\theta$

-نرتب المعادلة.

مثال :

$$r = 3\cos\theta$$
$$r^2 = 3r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = 3x$$
$$x^2 + y^2 - 3x = 0$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الإحداثي الديكارتي للإحداثي القطبي $(-2, \frac{4\pi}{3})$ هو :

A		B		C		D	
$(1, -\sqrt{3})$		$(-1, \sqrt{3})$		$(-1, -\sqrt{3})$		$(1, \sqrt{3})$	

2 المعادلة $y = -3$ على الصورة القطبية هي :

A		B		C		D	
$r = -3 \tan\theta$		$r = -3 \csc\theta$		$r = -3 \sec\theta$		$r = -3 \cos\theta$	

أكمل الفراغات التالية :

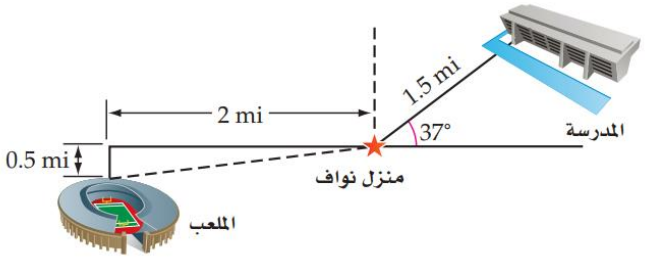
1 الإحداثي القطبي للإحداثي الديكارتي $(2, -3)$ هو .....

2 الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $\theta = \frac{3\pi}{4}$ هي .....

أوجد حل ما يلي:

إذا كانت مدرسة نواف تبعد 1.5mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها $53°$ شمال الشرق كما في الشكل أدناه فأجب عما يأتي :

- إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال كي يصل الى المدرسة ، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟
- إذا كان الملعب على بعد 2mi غربًا و 0.5mi جنوبًا ومنزل نواف يمثل القطب ، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟



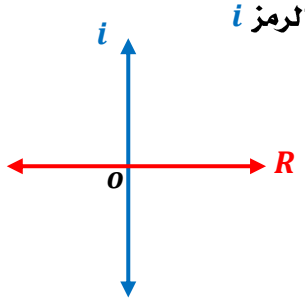
الأعداد المركبة

المستوى المركب

يتكون من محورين

المحور الحقيقي وهو المحور الأفقي ويرمز له بالرمز R

والمحور التخيلي وهو المحور الرأسي ويرمز له بالرمز i



الصورة الديكارتية

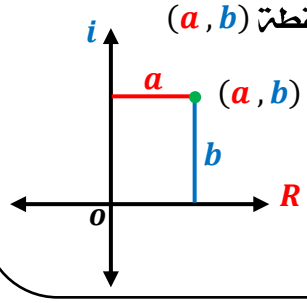
$a + bi$

a الجزء الحقيقي

bi الجزء التخيلي

تمثيل نقطة في المستوى المركب

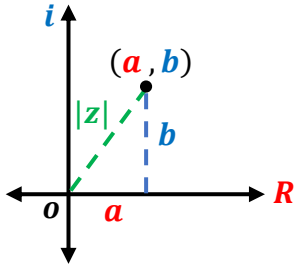
يمثل العدد المركب $a + bi$ على المستوى المركب بالنقطة (a , b)



القيمة المطلقة للعدد المركب

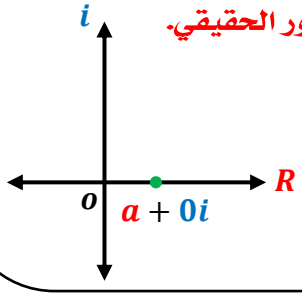
هي المسافة بين العدد والصفر في المستوى المركب.

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي : $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$



ملاحظة

العدد المركب $a + 0i$ يكون عددًا حقيقيًا لأن $b = 0$ ويمثل على خط الأعداد أو المحور الحقيقي.



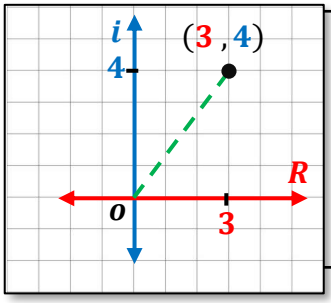
مثال

مثل العدد في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة:

$z = 3 + 4i$

$(3 , 4)$

$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$



$$z = a + bi \rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$a = r\cos\theta \ , b = r\sin\theta \ , r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a

- $a > 0$: $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
- $a < 0$: $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$
- $a = 0$:
  - $b > 0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$
  - $b < 0$: $\theta = -\frac{\pi}{2}$

تسمى r المقياس للعدد المركب.
وتسمى الزاوية θ سعة العدد المركب

مثال : $9 + 7i$ لتحويلها للصورة القطبية

1. $r = \sqrt{9^2 + 7^2}$
   $r = 11.4$
2. $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$
   $\theta = \tan^{-1}\frac{7}{9} = 37.8°$

$$9 + 7i \rightarrow 11.4\,(\cos 37.8° + i\sin 37.8)$$

تحويل العدد المركب

- من صورة ديكارتية إلى قطبية
- من صورة قطبية إلى ديكارتية

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \rightarrow z = a + bi$$

- نوجد القيم المثلثية
- نبسط .

مثال : $5(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ لتحويلها للصورة الديكارتية

1. $= 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2. $= \frac{-5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$

$$5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{-5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

صيغة الضرب

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

مثال : أوجد الناتج على الصورة القطبية ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 15\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 15\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$= -3.88 + 14.49\,i$$

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,, z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

صيغة القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

حيث $z_2 \neq 0\,, r_2 \neq 0$

مثال : أوجد الناتج على الصورة القطبية ثم عبر عنه بالصورة الديكارتية:

$$3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \div 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{4}i$$

نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدداً مركباً على الصورة القطبية ، وكان n عدداً صحيحاً موجباً ، فإن :

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = [r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)]$$

مثال

أوجد الناتج فيما يلي ، وعبر عنه بالصورة الديكارتية :

$$(1+\sqrt{3}i)^4$$

نحولها للصورة القطبية فتصبح : $2(\cos 60° + i\sin 60°)$

نطبق نظرية ديموافر: $[2(\cos 60° + i\sin 60°)]^4$

$$= [2^4(\cos 4(60°) + i\sin 4(60°))]$$

$$= 16\,(\cos 240° + i\sin 240°)$$

$$= -8 - 8\sqrt{3}\,i$$

الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح $n \geq 2$ ، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة ، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

حيث : $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ملاحظة

يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$

سعة الجذر الأول هو $\frac{\theta}{n}$

ثم تزداد الجذور بإضافة $\frac{2\pi}{n}$

مثال

أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2+2i$

أولًا : تكتب على الصورة القطبية : $2+2i=\sqrt{8}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

$n=3\,,\theta=45^\circ$

لإيجاد الجذور نعوض عن k بـ $0\,,1\,,2$

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

الجذر الأول $k=0$

$\approx 1.37+0.37i$

الجذر الثاني $k=1$

$\approx -1+i$

الجذر الثالث $k=2$

$\approx -0.37-1.37i$

الجذور النونية للعدد واحد

عند كتابة العدد واحد على الصورة القطبية : $r=1$ و $\theta=0$

$$1=1(\cos 0+i\sin 0)$$

أي أن الجذور النونية للعدد واحد تقع على دائرة الوحدة .

ملاحظة

الجذر الأول يكون مساوي لـ $\cos 0+i\sin 0=1$

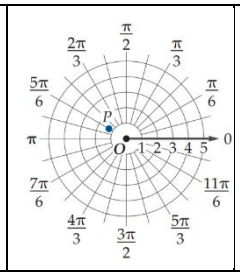
عند التعويض بـ $k=0$

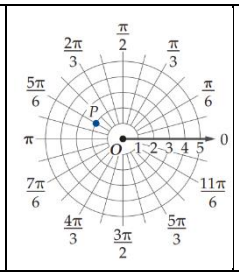
الجذور النونية المختلفة للعدد واحد جميعها لها المقياس نفسه $r=1$

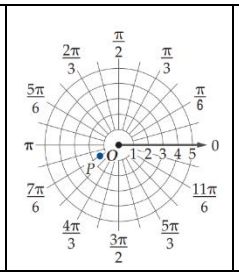
اختبر نفسك

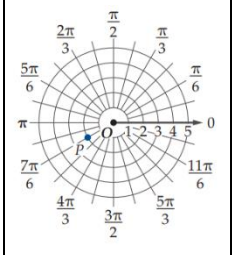
اختر الإجابة الصحيحة :

1 تمثيل العدد المركب $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي :

A 

B 

C 

D 

2 القيمة المطلقة للعدد المركب $z = -7 + 5i$ تساوي تقريباً .....

A	B	C	D
8.6	7.3	6.6	4.8

3 ناتج $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ .....

A	B	C	D
-16	-64	256	274

أكمل الفراغات التالية :

1 ناتج $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ هو .....

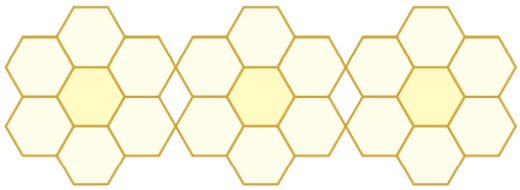
2 الصورة القطبية للعدد المركب $4 + 4i$ هي .....

3 الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$ هي ..... ، ..... ، ..... ، .....

أوجد حل ما يلي:

يعمل سالم في وكالة للإعلانات ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية كما هو مبين في الشكل ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب .

- أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية .



اختر الإجابة الصحيحة:								
1	تمثيل النقطة $(2\,,50°)$ في المستوى القطبي هو نفسه تمثيل النقطة ...							
	A	$(50\,,2°)$	B	$(2\,,130°)$	C	$(-2\,,-50°)$	D	$(-2\,,230°)$
2	المعادلة القطبية $r=4$ تمثيلها البياني عبارة عن دائرة طول قطرها ..							
	A	2	B	3	C	4	D	8
3	التمثيل البياني للمعادلة القطبية $\theta=30°$ عبارة عن ..							
	A	دائرة قطرها 15	B	دائرة قطرها 30	C	مستقيم يميل بزاوية $30°$	D	مستقيم يميل بزاوية $15°$
4	المسافة بين النقطتين $P_2=(3\,,60°)\,,P_1=(0\,,40°)$ تساوي ..							
	A	0	B	3	C	40	D	60
5	الاحداثيات الديكارتية للنقطة $T(-4\,,60°)$ هي							
	A	$(-2\,,-2\sqrt{3})$	B	$(-2\sqrt{3}\,,-2)$	C	$(2\,,2\sqrt{3})$	D	$2\sqrt{3}\,,2$
6	إذا كان للنقطة P الاحداثيات الديكارتيه $(\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$ فإن الاحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ للنقطة P هي ...							
	A	$(\sqrt{2}\,,30°)$	B	$(2\,,30°)$	C	$(\sqrt{2}\,,45°)$	D	$(2\,,45°)$
7	الصورة القطبية للمعادلة $x^2+y^2=9$							
	A	$r=9$	B	$r=\pm3$	C	$r=3\cos\theta$	D	$r=3\sin\theta$
8	ما الصورة الديكارتية للمعادلة $\theta=\frac{\pi}{6}$							
	A	$x+y=3$	B	$y=\sqrt{3}\,x$	C	$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$	D	$x^2+y^2=3\sin\theta$
9	القيمة المطلقة للعدد المركب $3+4i$ تساوي							
	A	2	B	3	C	4	D	5
10	سعه المركب $z=7\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$							
	A	$30°$	B	$60°$	C	$90°$	D	$120°$
11	الصورة الديكارتية للعدد المركب $2(\cos 45°+i\sin 45°)$ هي							
	A	$\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$	B	$2i\sqrt{2}$	C	$2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$	D	$2+2i$
12	قيمة المقدار $[2(\cos22.5°+i\sin22.5°)]^4$							
	A	-16	B	$-16\,i$	C	16	D	$16i$
13	عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ فإن مقياس الجذر الثاني يساوي							
	A	1	B	2	C	4	D	8
14	عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب $3(\cos\pi+i\sin\pi)$ ، فإن سعة الجذر الأول تساوي							
	A	$\frac{\pi}{5}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	π	D	5π
15	عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي							
	A	1	B	2	C	3	D	4

3-1 الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة
الدرس | اختبر نفسك

3-2 التحليل الإحصائي
الدرس | اختبر نفسك

3-3 الاحتمال المشروط
الدرس | اختبر نفسك

3-4 الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية
الدرس | اختبر نفسك

3-5 التوزيع الطبيعي
الدرس | اختبر نفسك

3-6 التوزيعات ذات الحدين
الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

الدراسات المسحية

هي جمع البيانات أو آراء أفراد المجتمع حول موضوع معين لتحليلها وتفسيرها.

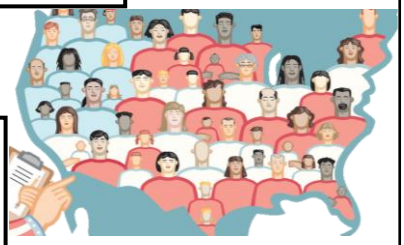
مثال: تريد أن تجمع الآراء حول القواعد المعتمدة في انتخاب رئيس الصف.

المجتمع

إذا شملت عملية جمع البيانات جميع الأفراد موضع الدراسة.

مثال: جميع الطلاب في مدرسة ما.

ويسمى تعداد عام



هو دراسة مسحية تتناول جميع أفراد المجتمع .

مثال: التعداد السكاني العام .

العينة

مجموعة جزئية من المجتمع يتم اختيارها لجمع المعلومات .

مثال: إذا تم اختيار عدد محدد من طلاب مدرسة مثل 100 طالب.

متحيزة

يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام.

مثال: سؤال كل لاعب في فريق السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز.

غير متحيزة

يتم اختيارها عشوائيًا ، أي تضمن لجميع أفراد المجتمع الفرصة نفسها لأن يكون ضمن عينة الدراسة.

مثال: يحتوي صندوق على أسماء طلاب المدرسة جميعهم ، سحب من الصندوق 100 اسم عشوائيًا وسئل أصحابها عن رأيهم في مقصف المدرسة.

الدراسة القائمة على الملاحظة

هي دراسة تتم ملاحظة الأفراد دون أي محاولة للتأثير في النتائج .

مثال:
اختر 80 طالبًا جامعيًا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية ، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء تم تدريسه في الجامعة .

الدراسة التجريبية

هي دراسة يتم فيها إجراء معالجة خاصة على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة وتجري ملاحظة استجاباتهم.

مثال:
اختر 200 طالب واقسمهم عشوائيًا إلى نصفين ، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي معين ، أما الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي .

المجموعة التجريبية

هي الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة في الدراسة .

في المثال: المجموعة التجريبية هي التي خضعت للبرنامج التدريبي .

المجموعة الضابطة

هي الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي لا تخضع للمعالجة أو تخضع لمعالجة شكلية فقط في الدراسة التجريبية.

في المثال: المجموعة الضابطة هي التي لم تخضع لأي برنامج تدريبي .

التمييز بين

الارتباط

هو وجود ظاهرتين كل منهما تؤثر في الأخرى وهو سهل الملاحظة.

مثال: عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز .

السببية

هي وجود ظاهرتين يكون وقوع إحداهما سببًا مباشرًا لوقوع الظاهرة الأخرى.

مثال: عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية دراسة							
	A	تجريبية متحيزه	B	قائمة على الملاحظة	C	مسحية	D	تجريبية غير متحيزه
2	أي سؤال مما يأتي يحدد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب بدون تحيز ؟							
	A	هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟	B	أيها تفضل أكثر العلوم أو الرياضيات ؟	C	ما مادتك المفضلة ؟	D	لا شيء مما سبق
3	أي من العبارات التالية تظهر (سببية)							
	A	كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.	B	إذا رفعت أثقالًا أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .	C	عندما يكون الجو باردًا وممطرًا بغزارة لا نذهب الى المدرسة.	D	عندما أمارس الرياضة اكون في وضع نفسي أفضل.

أكمل الفراغات التالية :

1	(الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد الدراسية لديهم) تعتبر دراسة مسحية .....
2	(تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثر في حركة الركبة أم لا) هذه الحالة تتطلب دراسة .....

أوجد حل ما يلي:

قبل الاختبار ، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي ، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما ، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى . ثم قام بمقارنة النتائج .

الدراسة السابقة تجريبية

- حدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة
- بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا .

التحليل الإحصائي

إيجاد أحد مقاييس النزعة المركزية لوصف البيانات وتلخيصها والوصول إلى الاستنتاجات المتعلقة بالدراسة .

المتغير

هو الخاصية أو السمة التي تأخذ قيمًا أو مستويات مختلفة .

وتكون كمية مثل العمر وكيفية مثل اللون

بيانات في متغير واحد

بيانات تصف ظاهرة واحدة فقط .

مثال : درجات اختبار الرياضيات للصف الثالث ثانوي .

مقاييس النزعة المركزية

المتوسط الحسابي

مجموع القيم مقسومًا على عددها .

لا توجد في البيانات قيم متطرفة.

مثال :
833 , 796 , 781, 776

الوسيط

العدد الذي يشغل موقع المنتصف عند ترتيب القيم تنازليًا أو تصاعديًا في مجموعة بيانات عددها فردي.

أو هو المتوسط للعددين الموجودين في المنتصف في مجموعة بيانات عددها زوجي ومرتبة ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا.

المنوال

القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم .

تحتوي البيانات على قيم متكررة.

مثال:
50 , 51 , 60, 60 , 59, 60 , 56

يفضل استخدامه عندما ...

توجد في البيانات قيم متطرفة ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات.

مثال :

17	15	17	16
15	16	16	12
18	18	18	14
1	48	16	40

من أنواع المقاييس

المَعْلمة
هي مقياس يصف خاصية في المجتمع .
مثال : متوسط دخل الفرد في المملكة.

الإحصائي
هي مقياس يصف خاصية في العينة .
مثال : دخل الفرد في مدينتك التي تسكنها .

هامش خطأ المعاينة

ينتج عند إجراء الدراسة على عينة من المجتمع وليس المجتمع بأكمله.

فعند سحب عينه حجمها n من مجتمع كلي ، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا ، قال 41% منهم : إنهم يرتاحون للنهضة العلمية.

ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\approx \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\approx \pm\frac{1}{\sqrt{3247}} \approx 0.0175$$

هامش الخطأ للمعاينة 1.75% تقريبًا

ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية.

$$1.75\% + 41\% = 42.75\%$$

$$1.75\% - 41\% = 39.25\%$$

الفترة تقع بين $42.75\% , 39.25\%$

مقاييس التشتت

تصف مدى تباعد البيانات أو تقاربها من أشهرها : التباين والانحراف المعياري

وهما يقيسان مدى بعد مجموعة البيانات عن المتوسط أو قربها منه .

قانونا الانحراف المعياري

العينة

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة

$\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة

x_k قيم العينة

المجتمع

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع

μ المتوسط الحسابي للمجتمع

x_k قيم المجتمع

مثال

اختير (5) طلاب عشوائيًا من فصل دراسي ، وقيست أطوالهم فكانت :

$175\ cm\ ,170\ cm\ ,168\ cm\ ,167\ cm\ ,170\ cm$

بين ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعاً ، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب .

البيانات تمثل عينة .

$n=5\ ,\bar{x}=170$

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(175-170)^2+(170-170)^2+(168-170)^2+(167-170)^2+(170-170)^2}{5-1}}$$

$$\approx 3.08$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مقياس النزعة المركزية الذي يصف البيانات 833, 796, 781, 776, 758 في أفضل صورة هو :

A	الانحراف المعياري	B	المتوسط	C	الوسيط	D	المنوال

2 في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط؟

A	مضاعفة كل عدد	B	زيادة كل عدد بمقدار 10	C	زيادة القيمة الصغرى فقط	D	زيادة القيمة الكبرى فقط

3 في الجدول درجات صف مكون من 10 طلاب في اختبار من 25 درجة

درجات 10 طلاب في اختبار من 25 درجة									
20	17	21	22	20	21	20	21	21	23

الانحراف المعياري للبيانات يساوي .....

A	1.76	B	1.05	C	1.93	D	2.45

أكمل الفراغات التالية :

1 مقياس النزعة المركزية الذي يُعرف بأنه القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم هو .....

2 المقياس الذي يصف خاصية في المجتمع هو .....

أوجد حل ما يلي:

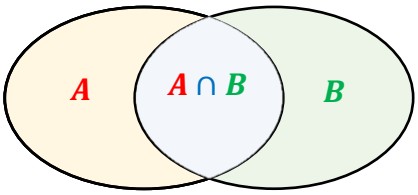
في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصًا ، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز.

- ما هامش خطأ المعاينة ؟
- ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز ؟

الاحتمال المشروط

هو احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A .

إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين ، فإن الاحتمال المشروط لوقوع الحادثة B ، إذا عُلم أن الحادثة A قد وقعت :



$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad , P(A) \neq 0$$

مثال

ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً . ما احتمال ظهور العدد 3 ، علمًا بأن العدد الظاهر فردي ؟

3 نواتج ذات عدد فردي
$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
النواتج الممكنة من إلقاء المكعب.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

الجداول التوافقية

جداول تكرارية ذات بعدين تسجل فيها البيانات ضمن خلايا.

التكرار النسبي : هو تكرار صفة مقسومًا على مجموع التكرارات .

مثال

أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى ، علمًا بأنه لا يمارس المشي.

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (W)	لا يمارس المشي (NW)
مريض (S)	1600	1200
معافى (H)	800	400

معافى ولا يمارس المشي ←
مجموع من لا يمارس المشي ←

$$P(H|WN) = \frac{P(H \cap WN)}{P(WN)}$$

$$= \frac{400}{1600} = \frac{1}{4}$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10كرات صفراء ، و 6 كرات بيضاء ، و 5 كرات خضراء إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا، فإن احتمال أن تكون حمراء إذا علمت أنها ليست خضراء .....

A	B	C	D
$\frac{6}{35}$	$\frac{11}{29}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$

2 يبين الجدول عدد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة فإذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة يساوي تقريبًا .....

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

A	B	C	D
48.6%	77.6%	86.2%	91.6%

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرة واحدة فإن احتمال ظهور شعارين علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل .....

2 رُقمت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 الى 8 ، إذا أدير مؤشر القرص ، فإن احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلم أنه استقر عند عدد زوجي .....

أوجد حل ما يلي:

يوضح الجدول أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة ، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ.

إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًا فأوجد احتمال كل مما يلي:

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

- الشخص راسب علمًا، بأنه لم يأخذ حصصًا.
- لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح.

النجاح

وقوع الشيء المرغوب فيه .

الفشل

عدم وقوع الشيء المرغوب فيه .

احتمال النجاح والفشل

إذا كان عدد مرات نجاح وقوع حادثة s من المرات ، وعدد مرات فشل وقوع الحادثة نفسها f من المرات ، فإن احتمال النجاح يُكتب على النحو $P(S)$ ، كما يُكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالصيغتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} \quad , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

الاحتمال باستعمال التوافيق

مثال

إذا كان عدد الذين رُشحوا من الصف الثاني الثانوي 3 ، ومن الصف الأول الثانوي 11 ، وكان عدد الجوائز 4 ، واختير 4 طلاب من الذين رُشحوا بطريقة عشوائية ، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول ؟

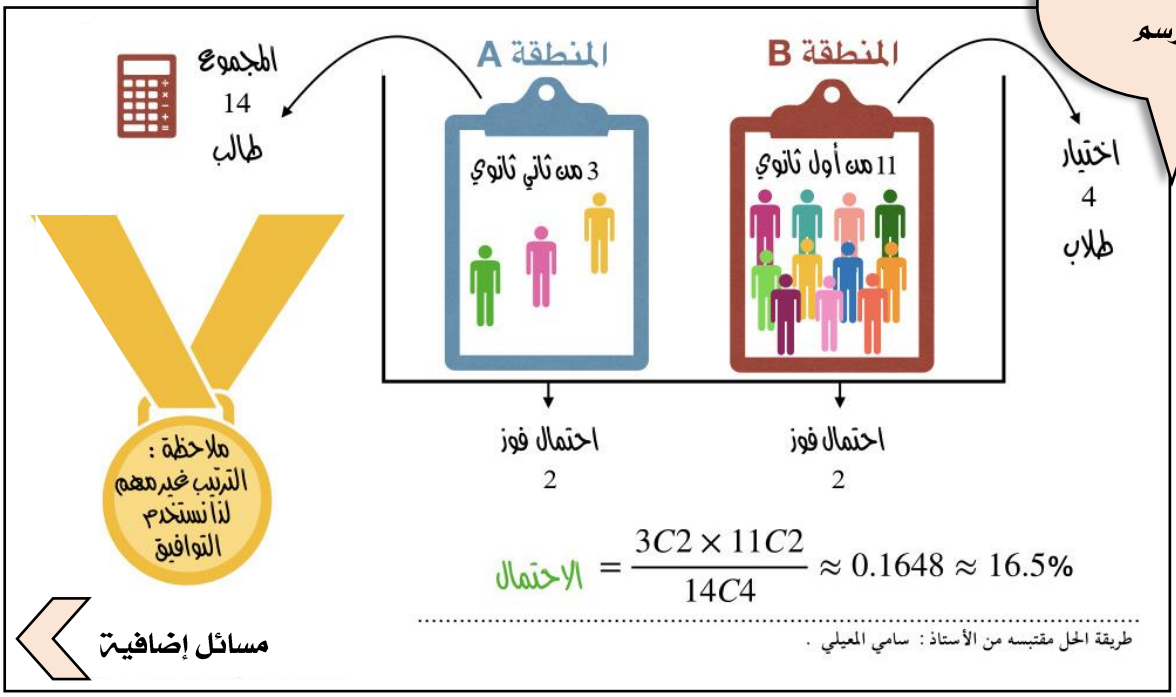
نحدد مرات النجاح : $s = {}_3C_2 \cdot {}_{11}C_2$

نحدد فضاء العينة : $s + f = {}_{14}C_4$

نوجد الاحتمال (فوز 2 من الأول و2 من الثاني) P

$$= \frac{s}{s+f} = \frac{{}_3C_2 \cdot {}_{11}C_2}{{}_{14}C_4} \approx 16.5\%$$

طريقة للحل بالرسم



طريقة الحل مقتبسة من الأستاذ : سامي المعيلي .

مسائل إضافية

الاحتمال باستعمال التباديل

مثال

اشترك صلاح ، وعبد الله ، و سليم في سباق $400m$ مع خمسة رياضيين آخرين .
ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى ؟

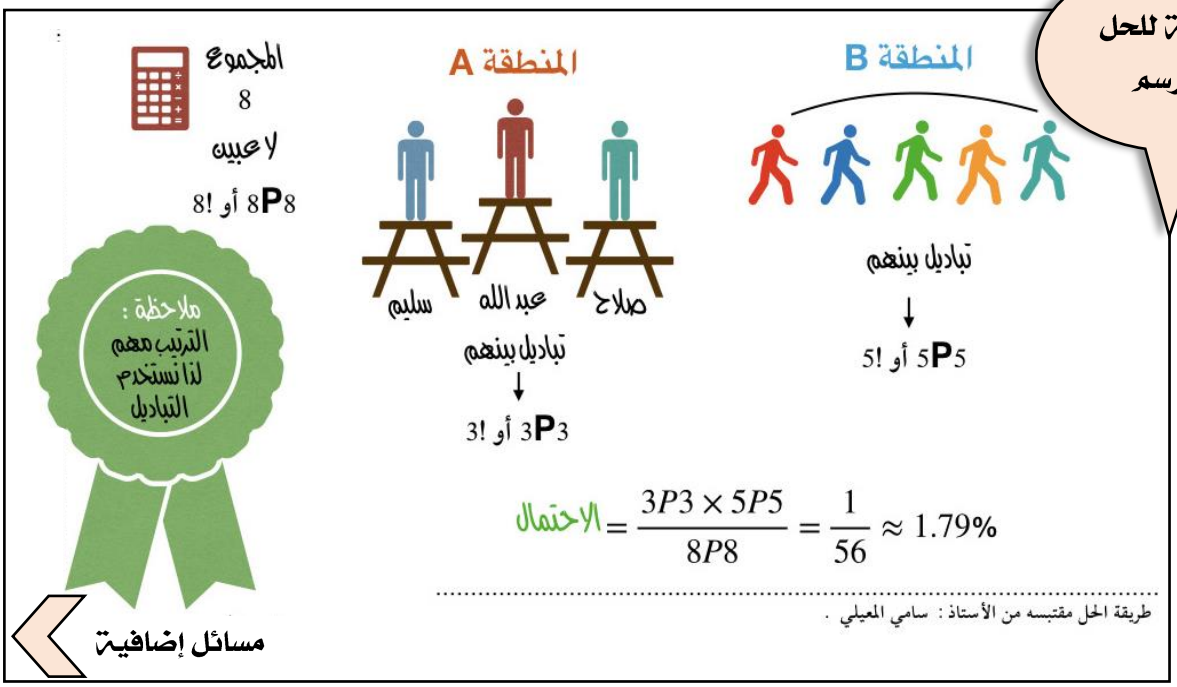
نحدد مرات النجاح : $s = 3P_3 = 3! = 6$

نحدد فضاء العينة : $s + f = 8P_3 = 336$

نوجد الاحتمال $P(S)$

$$= \frac{s}{s+f} = \frac{6}{336} \approx \frac{1}{56} \approx 1.79\%$$

طريقة للحل بالرسم



المتغير العشوائي

المتغير العشوائي هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة.

المتغير العشوائي المنفصل هو المتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم.

التوزيع الاحتمالي

هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مع احتمال وقوعها ويعبر عنه بجدول أو معادلة أو دالة أو تمثيل بياني ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي شرطين :

1. احتمال كل قيمه من قيم X محصورة بين 1 و 0 أي ان : $0 \le P(X) \le 1$
2. $\sum P(X) = 1$

التوزيع الاحتمالي هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل.

مثال

يوضح القرص ذو المؤشر الدوار توزيعًا احتماليًا ، حيث يمكن أن يتوقف المؤشر على أي من القطاعات الملونة ، وقد كتب على كل قطاع احتمال ظهوره (لاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1).

أوجد احتمال (أخضر أو أزرق) P .

$$P(\text{أخضر أو أزرق}) = P(\text{أزرق}) + P(\text{أخضر})$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

الاحتمال

الاحتمال النظري هو احتمال مبني على افتراضات يتوقع الحصول عليها.

الاحتمال التجريبي هو احتمال يتم تقديره من عدد من التجارب .

القيمة المتوقعة $E(X)$

هو المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل ، وهي مجموع حواصل ضرب **قيم** المتغير العشوائي X في **احتمال كل منها** $P(X)$

مثال

أوجد القيم المتوقعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$
$$= \frac{21}{6} = 3.5$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 صندوق به 10 كرات ، منها 6 حمراء، إذا سُحبت منه كرتان معًا عشوائيًا، فإن احتمال أن تكون الكرتان حمراوين :

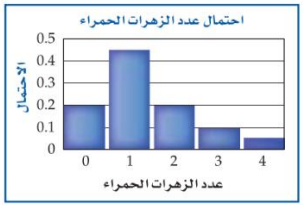
A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$

2 أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس ، والجدول المجاور يبين نتائج المسح إ ذا اختير أحدالذين شملهم هذا المسح عشوائيًا، فإن احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت هو .....

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

A	B	C	D
60%	40%	30%	20%

3 يوضح التمثيل البياني المجاور التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور ، فإن $P(0) =$.....



A	B	C	D
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4 ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

A	B	C	D
0.1	0.16	0.56	2

أكمل الفراغات التالية :

1 دخل 8 لاعبين A, B, C, D, E, F, G, H في مباراة إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا ، فإن احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A, C, E, G على الترتيب .....

أوجد حل ما يلي:

أجري اختبار رياضيات لطلاب الصف الثالث ثانوي والجدول يبين نتائج هذا الاختبار .

- بين أن هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًا.
- إذا اختير طالب عشوائيًا فما احتمال ألا يقل تقديره عن B ؟

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

التوزيع الاحتمالي المتصل

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل .

مثال : أطوال الأشخاص وأوزانهم .

وأفضل مثال على التوزيع الاحتمالي المتصل هو التوزيع الطبيعي .

خصائص التوزيع الطبيعي

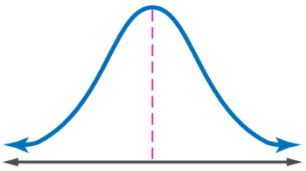
-التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس ، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.

-يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.

-المنحنى متصل .

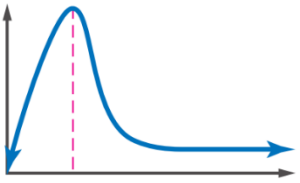
-يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب ، لكنه لا يلمسه.

-المساحة تحت المنحنى تساوي 1



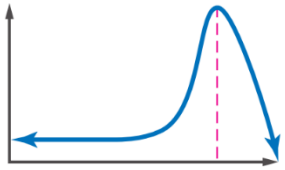
توزيعات ملتوية

التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين)



معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين.

التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)

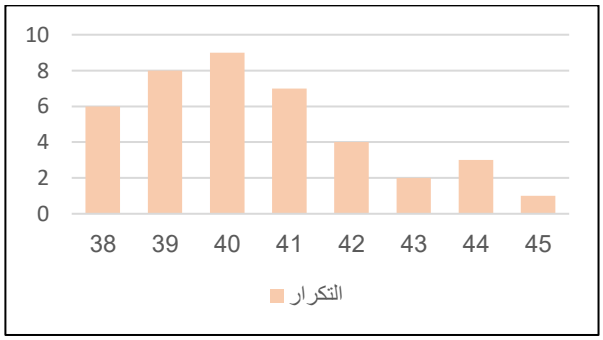


معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

مثال

حدد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تظهر التواء موجبًا أو التواء سالبًا أو موزعة توزيعًا طبيعيًا.

قياس الحذاء	التكرار
38	6
39	8
40	9
41	7
42	4
43	2
44	3
45	1



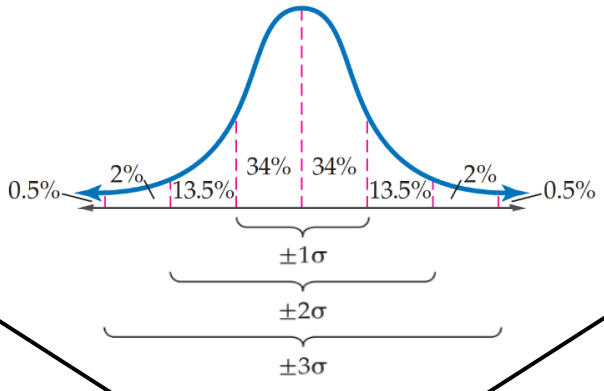
التواء موجبًا

القانون التجريبي

يستعمل لوصف المساحات تحت المنحنى الطبيعي .

يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص التالية :

يقع 68% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma\ ,\mu + \sigma)$



يقع 95% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma\ ,\mu + 2\sigma)$

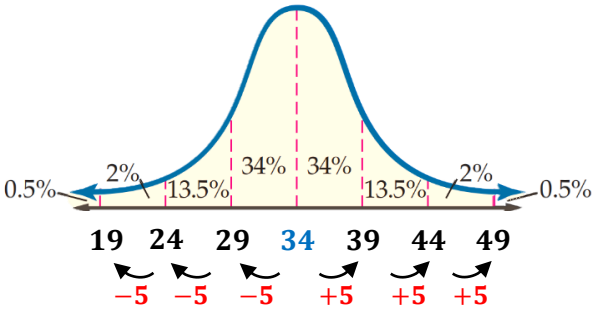
يقع 99% تقريبًا من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma\ ,\mu + 3\sigma)$

مثال

المتوسط لتوزيع طبيعي 34 وانحرافه المعياري 5 .

أوجد احتمال أن تقل قيمة لـ X تم اختيارها عشوائيًا في هذا التوزيع عن 49

أي $P(X < 49)$



1. نضع المتوسط في المنتصف .
2. نوجد القيم بإضافة الانحراف المعياري للمتوسط يمين ونطرح قيمة الانحراف المعياري منه في اليسار.
3. نرسم منحنى التوزيع
4. نظلل المنطقة التي تمثل الاحتمال المطلوب .

$$P(X < 49) = (2 + 13.5 + 34 + 34 + 13.5 + 2 + 0.5)\% = 99.5\%$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 يوضح الجدول المجاور نتائج أحد الاختبارات النهاية العظمى للاختبار 40 فإن البيانات في الجدول تظهر :

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13–15	12
16–18	27
19–21	29
22–24	19
25–27	8
28–31	1
32–35	1

A	التواء موجب	B	التواء سالب	C	توزيع طبيعي	D	لا شيء مما سبق

2 إذا توزعت البيانات $\mu = 74, \sigma = 6$ توزيعًا طبيعيًا فإن ..... $P(X > 86) \approx$

A	1.5%	B	2.5%	C	3.5%	D	4.5%

3 عد طلاب قطع الحلوى في 100 علبة صغيرة فوجدوا أن عدد قطع الحلوى لكل علبة يتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي 23 لكل علبة وانحراف معياري يساوي قطعة واحدة فإن عدد العلب التي تحتوي على عدد من قطع الحلوى بين 22, 24 هي :

A	88 تقريبًا	B	80 تقريبًا	C	68 تقريبًا	D	60 تقريبًا

أكمل الفراغات التالية :

1 تظهر البيانات التالية 14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15 التواء .....

2 إذا توزعت البيانات توزيعًا طبيعيًا، فإن $\mu = 13, \sigma = 0.4$ $P(X < 12.6) \approx$ .....

أوجد حل ما يلي:

أعطى عمران اختبارًا قصيرًا لطلبته البالغ عددهم 50 طالبًا ، وكانت الدرجات موزعة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي 21 ، و انحراف معياري 2.

- ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19 , 23 ؟
- ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و 25 .

التوزيع ذو الحدين

تجربة احتمالية لها نتيجتان فقط نجاح أو فشل .

تجربة ذات الحدين

هي تجربة احتمالية تحقق الشروط التالية :

1. يعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة (المرات).
2. كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان : نجاح S أو فشل F .
3. $P(S)$ يرمز له بالحرف p هو نفسه في كل محاولة .

واحتمال الفشل $P(F)$ ويرمز له بالحرف q هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1-p$

ويمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

مثال

حدد ما إذا كانت كل تجربه مما يأتي ذات حدين ، أو يمكن جعلها كذلك .
وإذا كانت تجربة ذات حدين ، فاكتب قيم n , p , q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة . وإذا لم تكن كذلك فبين السبب.

أجاب خالد عن اختبار مكون من 20 فقرة من نوع (الاختيار من متعدد) لكل فقرة منها أربع إجابات ، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار) .
وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة .

تجربة ذات حدين

$$n = 20 , p = \frac{1}{4} , q = \frac{3}{4} , X = 0 , 1 , 2 , \dots , 20$$

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو :

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X\, q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!\,X!}\, p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة .

مثال

تقدمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل ، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع) ، ما احتمال أن تحصل على : 7 أسئلة صحيحة الإجابة ؟

$n = 10 , p = \frac{1}{4} , q = \frac{3}{4} , X = 7$

$P(X) = {}_nC_X\, p^X\, q^{n-X}$

$P(7) = {}_{10}C_7\, p^7\, q^{10-7}$

$P(7) = {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$P(7) = 0.003$

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين

المتوسط	$\mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

التباين أكبر من الانحراف المعياري دائمًا.

مثال

أوجد المتوسط والتباين و الانحراف المعياري :

إذا كان 89% من طلاب المرحلة الثانوية في إحدى المدارس يتابعون مباريات منتخبهم الوطني ، وتم اختيار 5 طلاب عشوائيًا من هذه المدرسة ، وسؤالهم عما إذا كانوا يتابعون مباريات منتخبهم الوطني .

$n = 5 , p = 0.89 , q = 0.11$

المتوسط $\mu = np$

$\mu = (5)(0.89)$

$\mu \approx 4.45$

التباين $\sigma^2 = npq$

$\sigma^2 = (5)(0.89)(0.11)$

$\sigma^2 \approx 0.49$

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\sigma = \sqrt{0.49}$

$\sigma \approx 0.7$

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما تمثل n عدد المحاولات ، واحتمال النجاح p واحتمال الفشل q ، ويكون $nq \geq 5$, $np \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = np$ ، و انحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$

مثال

أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي . غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك ، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة . ما احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية ؟

$$n = 250 , p = 0.32 , q = 1 - 0.32 = 0.68$$

$$np = 250(0.32) = 80 > 5$$

$$nq = 250(0.68) = 170 > 5$$

يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال :

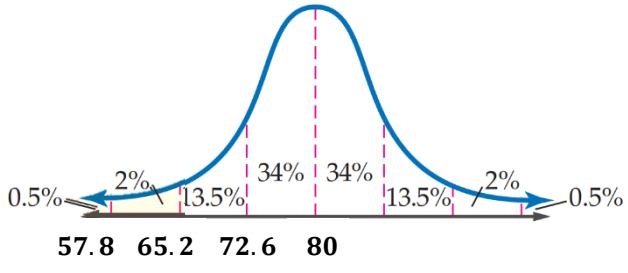
$$\mu = np = 80$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{54.4} \approx 7.4$$

$$65 < 80$$

أصغر بمقدار انحرافين معياريين

لذا يكون احتمال ألا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية يساوي تقريبًا : $2\% + 0.5\% = 2.5\%$



اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 بينت دراسة أن 26% من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم فإن ..... $\mu =$

A		B		C		D	
3.52		2.60		1.92		1.39	

2 بينت دراسة أن 26% من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم فإن ..... $\sigma =$

A		B		C		D	
3.52		2.60		1.92		1.39	

أكمل الفراغات التالية :

1 تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6 ثم ألقي المكعب 10 مرات والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5 تسمى هذه التجربة .....

2 ألقيت قطعة نقد 20 مرة ، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة ، فإن $q =$ .....

3 أفادت دراسة إحصائية أن 65% من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم ، إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائيًا ممن يمتلكون سيارات ، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم ، فإن ..... $\sigma^2 \approx$

أوجد حل ما يلي:

في دراسة حديثة أجريت على خريجي إحدى الكليات تبين أن 78% من الخريجين يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج ، تم اختيار 4 خريجين عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كان يرغبون في تلقي التدريب العملي بعد تخرجهم ، إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الخريجين الذين أجابوا بنعم عن السؤال.

- كون توزيع ذات الحدين .
- أوجد احتمال أن 3 منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال .

أسئلة تحصيلي

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1 عند أرسال استبانة إلى المدارس الحكومية والخاصة لاستطلاع رأيهم في مادة الرياضيات تكون نوع الدراسة هو .....

A	دراسة تجريبية	B	دراسة مسحية	C	دراسة بالملاحظة	D	ارتباط

2 (اختيار 200 طالب وتقسيمهم عشوائيًا إلى نصفين مع إخضاع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي وعدم إخضاع الأخرى لأي برنامج) تعتبر ...

A	دراسة تجريبية	B	دراسة مسحية	C	دراسة بالملاحظة	D	ارتباط

3 (نريد أن نعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنين يؤثر في سعة الرئة أم لا ..) تعتبر ..

A	دراسة تجريبية	B	دراسة مسحية	C	دراسة بالملاحظة	D	ارتباط

4 في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية اهم ، إن هامش الخطأ لهذه الدراسة ....

A	± 0.001	B	± 0.01	C	± 0.1	D	± 10

5 أجريت دراسة مسحية على 625 شخص قالوا إن 47% من القراءة مفيدة ، أي عينة من الأشخاص قالوا إنها مفيدة جميعهم ...

A	بين 43% و 51%	B	بين 44% و50%	C	بين 40% و50%	D	بين 45% و49%

6 أي مما يلي ليس من مقاييس النزعة المركزية ؟

A	المتوسط الحسابي	B	الوسيط	C	المنوال	D	الانحراف المعياري

7 أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بيانات التالية بشكل أفضل : 45 , 53 , 42 , 75 , 47 , 52 , 46 , 15

A	الوسط الحسابي	B	الوسيط	C	التباين	D	المنوال

8 يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين وغير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية ، إذا اختير طالب عشوائيًا .
فما احتمال أن يكون مشاركًا علمًا بأنه في الصف الثالث

	الصف الثاني	الصف الثالث
مشارك	30	40
غير مشارك	50	80

A	$\frac{3}{5}$	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{1}{5}$

9 يحاول باحث تحديد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح على مجموعة الأزهار ، فقام بتعريض مجموعة منها لإضاءة المصابيح الجديدة والأخرى لإضاءة المصابيح العادية
ويبين الجدول التالي أعداد الأزهار التي عاشت والتي ماتت
فإذا اخترنا زهرة واحدة عشوائيًا .
فما احتمال أن تكون الزهرة قد ماتت علمًا بأنها تعرضت للإضاءة الجديدة .

	إضاءة جديدة	إضاءة عادية
عاشت	24	18
ماتت	6	12

A	20%	B	25%	C	30%	D	40%

الفصل الثالث
ملحق الإجابات

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

10 إذا اشترك عبد الله في سباق 400 m مع ثلاثة رياضيين آخرين فإن احتمال أن ينهي عبدالله السباق في المركز الأول يساوي .....

A		B		C		D	
25%		50%		75%		100%	

11 من الشكل المجاور : المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي .....

A		B		C		D	
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1	

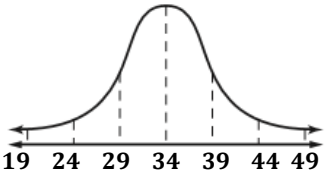
12 مجموعة بيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًا ، فإذا كان وسطها الحسابي 2 و انحرافها المعياري 1 ، فما نسبة أن يكون x أكبر من 3 ؟

A		B		C		D	
84%		97%		16 %		25%	

13 يتوزع عمر 10000 بطارية توزيعًا طبيعًا بوسط 300 يوم ، وانحراف معياري 40 يومًا ، كم بطارية يقع عمرها بين 340 و 260 يومًا ؟

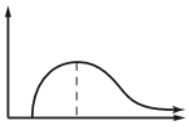
A		B		C		D	
6800		5000		3400		2500	

14 التوزيع الطبيعي المجاور وسطه 34 ، وانحرافه المعياري 5
كم احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًا أقل من 49 ؟



A		B		C		D	
68%		87%		99.5%		100%	

15 ما الوصف الأفضل للتمثيل البياني المجاور ؟



A		B		C		D	
ذو التواء موجب		ذو التواء سالب		يمثل توزيعًا طبيعيًا		يمثل توزيعًا متماثلا	

16 كسب لاعب 50% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية ، ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة ؟

A		B		C		D	
$\frac{5}{16}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		1	

17 في تجربة ذات حدين : إذا كان احتمال النجاح 35% ، وعدد المحاولات 4 فإن الوسط يساوي .....

A		B		C		D	
1.3		1.4		1.5		1.6	

18 في حادثة ذات حدين كان عدد المحاولات 20 ، وكان الوسط 12 ، كم ستكون قيمة الانحراف المعياري ؟

A		B		C		D	
$\sqrt{4.8}$		1.2		$\sqrt{1.2}$		4.8	

19 اخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشر القادمة 40% ، إن التباين يساوي .....

A		B		C		D	
$\sqrt{2.4}$		2.4		4		6	

4-1 تقدير النهايات بيانيًا
الدرس | اختبر نفسك

4-2 حساب النهايات جبريًا
الدرس | اختبر نفسك

4-3 المماس والسرعة المتجهة
الدرس | اختبر نفسك

4-4 المشتقات
الدرس | اختبر نفسك

4-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل
الدرس | اختبر نفسك

4-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
الدرس | اختبر نفسك

أسئلة تحصيلي

تقدير النهاية

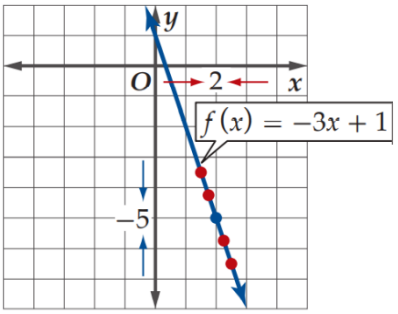
النهاية تساوي قيمة الدالة

مثال

قدر النهاية بيانيًا: $\lim_{x\to 2}(-3x+1)$

x	$(-3x+1)$	y
0	$-3(0)+1$	1
1	$-3(1)+1$	-2

نلاحظ : $\lim_{x\to 2}(-3x+1) = f(2)$



من التمثيل البياني نجد أنه كلما اقتربت x من العدد 2 فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5

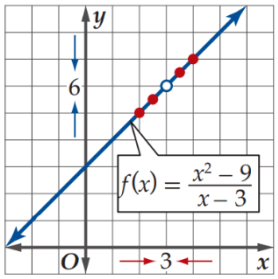
$$\lim_{x\to 2^+}(-3x+1) = \lim_{x\to 2^-}(-3x+1) = -5$$

$$\lim_{x\to 2}(-3x+1) = -5$$

النهاية لا تساوي قيمة الدالة

قدر النهاية بيانيًا: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

x	$\frac{x^2-9}{x-3}$	y
0	$\frac{0^2-9}{0-3}$	3
1	$\frac{1^2-9}{1-3}$	4



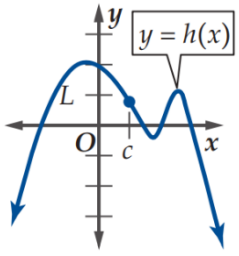
نلاحظ : $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} \neq f(3)$

من التمثيل البياني نجد أنه كلما اقتربت x من العدد 3 فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

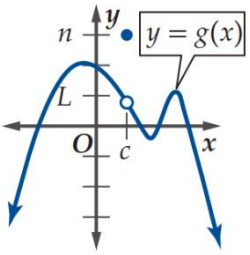
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.



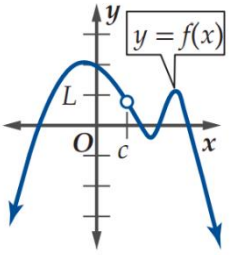
$\lim_{x\to c} h(x) = L$

$h(c) = L$



$\lim_{x\to c} g(x) = L$

$g(c) = n$



$\lim_{x\to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة

تقدير النهايات بيانيًا

النهايات

النهايات من جهة واحد

النهاية من اليمين

إذا اقتربت $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين فإن :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$$

النهاية من اليسار

إذا اقتربت $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين فإن :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$$

النهايات من جهتين

النهاية عند نقطة

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين ، أي أن :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

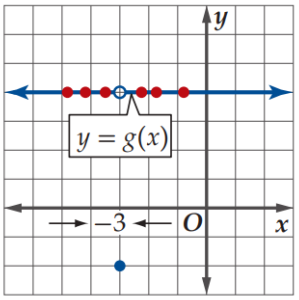
إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

مثال

قدر إن أمكن كلًا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة :

$$g(x) = \begin{cases} 4, & x \neq -3 \\ -2, & x = -3 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = 4$$

$$\lim_{x\to -3^+} g(x) = 4$$

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^+} g(x) = 4$$

النهاية موجودة وتساوي 4

النهايات غير المحدودة

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \ , \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

تستعمل العبارتين لوصف الحالة التي بسببها $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

الرمزان ∞ , $-\infty$ لا يمثلان عددين حقيقيين .

لماذا النهاية غير موجود عند نقطة ؟؟

تكون $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة عندما :

عدم تساوي النهايتين

تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين .

السلوك غير المحدود

تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدد عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص بشكل غير محدد عند اقتراب x من العدد c من اليمين أو العكس .

السلوك التذبذبي

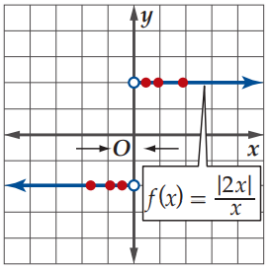
تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c .

مثال

قدر النهاية إذا كانت موجودة :

$\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$

من التمثيل البياني



$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$

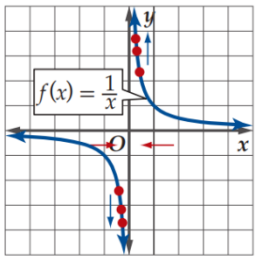
$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$

غير موجودة

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

من التمثيل البياني



$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

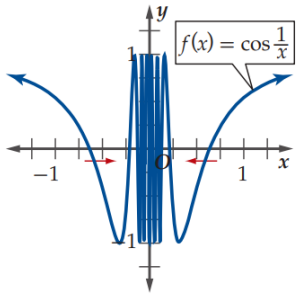
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

غير موجودة

$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

من التمثيل البياني



قيم الدالة تتذبذب بين -1 و 1 كلما اقتربت قيم x من الصفر

$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$

غير موجودة

النهايات عند المالانهاية

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود ، فإن :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$$

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود ، فإن :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$$

ملاحظة

إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت
فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة .
أيضًا إذا اقتربت قيم الدالة من عدد حقيقي عند اقتراب قيم x من ∞ أو $-\infty$
فإن ذلك يعني وجود خط تقارب أفقي للدالة .

المستقيم $x = c$ خط تقارب رأسي

لدالة f إذا كانت :

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$$

أو $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما .

المستقيم $y = c$ خط تقارب أفقي

لدالة f إذا كانت :

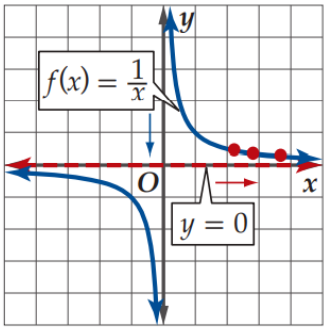
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$$

أو $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$

مثال

قدر النهاية إذا كانت موجودة :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$



من التمثيل البياني نجد أنه كلما زادت قيم x اقتربت قيم $f(x)$

من العدد 0

تشير النهاية إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ملاحظة

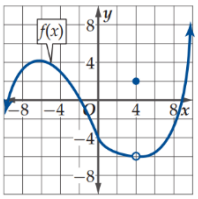
إذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين فالنهاية غير موجودة.

إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين فالنهاية موجودة.

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

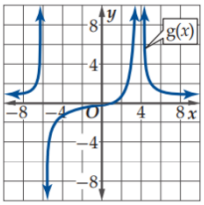
1 من التمثيل البياني المجاور



قيمة $\lim_{x\to -4} f(x) =$ .....

4	D	3	C	2	B	-6	A

2 من التمثيل البياني المجاور



قيمة $\lim_{x\to 4} g(x) =$ .....

$-\infty$	D	0	C	8	B	∞	A

أكمل الفراغات التالية :

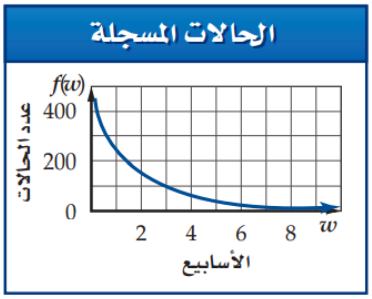
1 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x}{x} =$ .....

2 $\lim_{x\to -\infty} \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} =$ ..... .

أوجد حل ما يلي:

تم توزيع لقاح للحد من عدوى مرض ما ، ويبين التمثيل البياني أدناه عدد حالات الإصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح .

- استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w), \lim_{w\to 3} f(w)$.
- استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة وفسر النتيجة .



نهايات الدوال

نهاية الدالة الثابتة

$$\lim_{x\to c} k = k$$

مثال :

$$\lim_{x\to 2} 5 = 5$$

نهاية الدالة المحايدة

$$\lim_{x\to c} x = c$$

مثال :

$$\lim_{x\to 3} x = 3$$

خصائص النهايات

إذا كان c , k عددين حقيقيين ، n عدد صحيحًا موجبًا ، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين ، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة :

1. خاصية المجموع :
$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

2. خاصية الفرق :
$$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

3. خاصية الضرب في ثابت :
$$\lim_{x\to c} [kf(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$$

4. خاصية الضرب :
$$\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$$

5. خاصية القسمة :
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$ ، حيث $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

6. خاصية القوة :
$$\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

7. خاصية الجذر النوني :
$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$
حيث n عدد زوجي

8. إذا كان n عدد فرديًا ، فإن
$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

حساب النهايات جبريًا

نهايات الدوال عندما $x \to c$

نهايات دوال كثيرات الحدود

$p(x)$

كثيرة حدود ، c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

نهاية الدوال النسبية

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

دالة نسبية ، c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

حساب النهايات

التعويض المباشر

يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال التعويض المباشر بشرط أن لا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تحسب عندها النهاية .

مثال :

$$\lim_{x \to 4}(x^2 - 5x + 7)$$

$$= (4)^2 - 5(4) + 7$$

$$= 16 - 20 + 7$$

$$= 3$$

التحليل

إذا قمت بحساب نهاية الدالة النسبية ووصلت للصيغة الغير محددة وهي $\frac{0}{0}$ ، بسط العبارة جبريًا من خلال التحليل.

مثال:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

ناتج التعويض المباشر

$$= \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3}(x + 3)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

إنطاق البسط أو المقام

طريقة أخرى لإيجاد نهايات ناتج التعويض فيها الصيغة الغير محددة .

مثال:

$$\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$

ناتج التعويض المباشر

$$= \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5} \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 5}$$

$$\lim_{x \to 25} \frac{(x - 25)(\sqrt{x} + 5)}{x - 25}$$

$$\lim_{x \to 25} \sqrt{x} + 5$$

$$= 5 + 5 = 10$$

حساب النهايات عند المالانهاية

نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$

$\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ إذا كان n عدد زوجيًا .

$\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n عدد فرديًا .

نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

دالة كثيرة حدود فإن :

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

مثال

احسب كل نهاية مما يأتي :

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 4x^2 + 9)$$

$$= \lim_{x\to\infty}(x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^6 + 3x^5 - x)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^6) = \infty$$

حساب النهايات جبريًا

نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

لأي عدد صحيح n ، فإن :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

المتتابعة دالة مجالها N

مداها R

نهاية المتتابعة غير المنتهية
هي النهاية عندما $n\to\infty$

نهايات الدوال النسبية

درجة البسط > درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x-10}$$
$$=0$$

درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$$

بحسب إشارة الحد الرئيس في
البسط والمقام

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+7}{5x+1}$$
$$=-\infty$$

درجة البسط = درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=$$

$$\frac{\text{معامل الحد الرئيس}}{\text{معامل الحد الرئيس}}$$

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$$
$$=\frac{7}{2}=3.5$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 — $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{x+1}-1}=\ldots\ldots\ldots$

A		B		C		D	
∞		8		2		غير موجودة	

2 — $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 2x}{x}=\ldots\ldots\ldots$

A		B		C		D	
∞		1		0		غير موجودة	

3 — نهاية المتتابعة $a_n=\dfrac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$

A		B		C		D	
4		3		-3		-4	

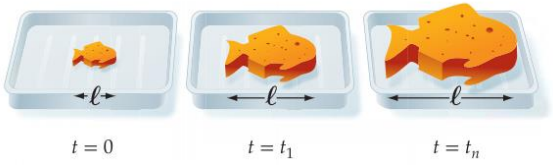
أكمل الفراغات التالية :

1 — $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2-x}=\ldots\ldots\ldots$

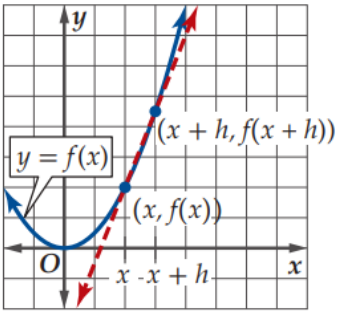
2 — $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}=\ldots\ldots\ldots$

أوجد حل ما يلي:

تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج ، وعند وضع المادة الهلامية في الماء ، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء ، والتضخم ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t)=\dfrac{105t^2}{10+t^2}+25$ حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالمليمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء .



- ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه بالماء ؟
- ما نهاية الدالة عندما $t\to\infty$ ؟
- وضح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج .



المماس : مستقيم يتقاطع مع المنحنى ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس .

قسمة الفرق : ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x+h, f(x+h))$

ويكتب بالصيغة: $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

معدل التغير اللحظي

معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ويعطى بالصيغة $m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه

مثال

أوجد معادلة ميل مماس منحنى الدالة عند النقطة المعطاة :

$y = x^2 \ , (3 \ , 9)$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (6+h)$$

$$= 6 + 0 = 6$$

ميل المماس عند أي نقطة

أوجد معادلة ميل المنحنى للدالة عند أي نقطة عليه :

$y = x^2$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h)$$

$$= 2x$$

السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفة دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تعطى بالصيغة :

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

التغير في المسافة ← البسط
التغير في الزمن ← المقام

مثال

تمثل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًا ، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون $t = 1\ s$, $t = 2\ s$

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{71 - 54}{2 - 1} = 17\ \text{ft/s}$$

$$a = 1 , b = 2$$

$$h(2) = 5 + 65(2) - 16(2)^2$$

$$h(2) = 71$$

$$h(1) = 5 + 65(1) - 16(1)^2$$

$$h(1) = 54$$

السرعة المتجهة اللحظية

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفة دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة :

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

شرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال

تمثل الدالة $s(t) = 5t + 8$ المسافة التي يقطعها جسم متحرك .
أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(t+h) + 8 - (5t + 8)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5t + 5h + 8 - 5t - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 5$$

$$= 5$$

إذا طلب عند لحظة زمنية محددة
نعوض عن الـ t
ونكمل الخطوات

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2 - 5x$ عند النقطة $(1, -4)$ يساوي							
	A	5	B	1	C	-3	D	-4
2	السرعة المتوسطة المتجهة لجسم ما بالميل لكل ساعة ، بعده عن نقطة ثابتة $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$ في الفترة الزمنية $3 \le t \le 5$ ، تساوي تقريبًا							
	A	45 mi/h	B	65 mi/h	C	55 mi/h	D	60 mi/h
3	معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما عند اي زمن بمسافة يقطعها الجسم $s(t) = t - 3t^2$ هي :							
	A	$v(t) = 1 - 9t$	B	$v(t) = -6t$	C	$v(t) = -3t$	D	$v(t) = 1 - 6t$

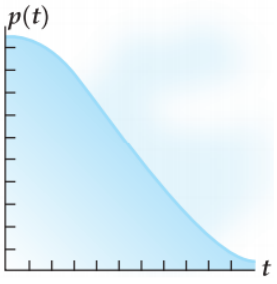
أكمل الفراغات التالية :

1	معادلة ميل منحنى الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ عند اي نقطة عليه .....
2	السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما، بعده عن نقطة ثابته $f(t) = 38t - 16t^2$ ، بزمن $t = 0.8$ تساوي .....

أوجد حل ما يلي:

تمثل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي

بعد t ثانية من انطلاقه .



- أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن .
- أوجد الميل عند $t = 2\ s, 5\ s, 7\ s$.

$$\frac{d}{dx}$$ =

المشتقة

نهاية ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ويرمز لها بالرمز $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الاشتقاق

عملية إيجاد المشتقة وتسمى النتيجة معادلة تفاضلية.

المؤثر التفاضلي

قد يسبق الدالة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ وهو يعني إيجاد المشتقة

حيث أن $\frac{df}{dx}$ هو رمز أخر لمشتقة الدالة $f(x)$

ملاحظات

يمكنك حل مسائل ميل مماس المنحنى والسرعة المتجهة اللحظية بطريقة مختصرة وذلك عن طريق قواعد الاشتقاق .

ميل مماس المنحى هو المشتقة الأولى للدالة.

أيضًا السرعة المتجهة اللحظية هو المشتقة الأولى للدالة.

إذا كانت مشتقة كل من الدالتين f و g موجودة عند x وكان $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال :

$$j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$$

$$j'(x) = \frac{7(12x + 5) - (7x - 10)(12)}{(12x + 5)^2}$$

$$j'(x) = \frac{155}{(12x + 5)^2}$$

إذا كان $f(x) = c$

فإن $f'(x) = 0$

c عدد ثابت .

مثال :

$f(x) = 5$

$f'(x) = 0$

قواعد الاشتقاق

إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$

فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

مثال :

$f(x) = 3x^2 - 4x + 6$

$f'(x) = (2)\ 3x^{2-1} - 4 + 0$

$f'(x) = 6x - 4$

إذا كان $f(x) = c\ x^n$

فإن $f'(x) = c\ n\ x^{n-1}$

حيث n عدد حقيقي ، c عدد ثابت.

مثال :

$f(x) = 2x^5$

$f'(x) = (2)\ 5x^{5-1}$

$f'(x) = 10x^4$

إذا كان $f(x) = x^n$

فإن $f'(x) = n\ x^{n-1}$

حيث n عدد حقيقي

مثال:

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^{4-1}$

$f'(x) = 4x^3$

إذا كانت مشتقة كل من الدالتين f و g موجودة عند x

فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\ g(x)] = f'(x)\ g\ (x) + f(x)\ g'(x)$

مثال :

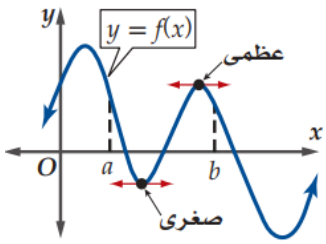
$q(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

$q'(x) = 4(x^2 + 9) + (4x + 3)(2x)$

$q'(x) = 4x^2 + 36 + 8x^2 + 6x$

$q'(x) = 12x^2 + 6x + 36$

نظرية القيمة المتوسطة



إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a\,,b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a\,,b]$ وذلك إما عند أحد طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة .

مثال

الدالة $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي ، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0\,,6]$.

أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

1 ← نشتق الدالة: $h'(t) = 40t - 160$

2 ← نساوي المشتقة بالصفر ونحلها

$$40t - 160 = 0$$

$$40t = 160$$

$$t = 4$$

3 ← 4 تقع في الفترة $[0\,,6]$

للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 4$

4 ← نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 0\,,4\,,6$

$$h(0) = 20(0)^2 - 160(0) + 330 = 330$$

$$h(4) = 20(4)^2 - 160(4) + 330 = 10$$

$$h(6) = 20(6)^2 - 160(6) + 330 = 90$$

5 ← أقصى ارتفاع 330 ft عند 0 s وأدنى ارتفاع 10 ft عند 4 s

$f(x) =$ $f'(x) =$ $f''(x) =$

لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$ ، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة ، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة ، ويرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة ، فإنها تسمى المشتقة الثالثة ، ورمزها $f'''(x)$ وهكذا .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :								
1	مشتقة الدالة $g(x) = -x^2 + 2x + 11$ عند النقطة $x = 3$ تساوي :							
	A	5	B	1	C	-3	D	-4
2	النقاط الحرجة للدالة $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k$ في الفترة $[0\ ,3]$							
	A	$(1,-1)$	B	$(-1,-1)$	C	$(1,1)$	D	$(0,1)$
3	مشتقة الدالة $f(x) = (-7x + 4)(2 - x)$ هي :							
	A	-18	B	$14x - 10$	C	$14x - 18$	D	$-14x - 18$
أكمل الفراغات التالية :								
1	مشتقة الدالة $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$							
2	مشتقة الدالة $f(m) = \frac{3-2m}{3+2m}$							

أوجد حل ما يلي:

تعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة :

$$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$$

حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم .

- أوجد معادلة تمثل معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة .
- أوجد معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة عندما $h = 2$.
- أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة $0 \leq h \leq 24$.

المساحة تحت منحنى

يمكن تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال مستطيلات متساوية العرض فمثلًا
يمكن تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومحور x وذلك خلال فترة محددة .

المساحة تحت المنحنى باستعمال مستطيلات

- نوجد طول الفترة بطرح بدايتها من نهايتها .
-نوجد عرض المستطيل وذلك بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات المحدد .
-نقسم الفترة إلى عدد من الفترات بعدد المستطيلات .
-نرسم على كل فترة من الفترات مستطيلًا بعدية الأول (عرض المستطيل) والثاني (طول المستطيل) ويساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة .

مثال

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0\ ,\ 12]$ باستعمال 4 مستطيلات .
استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه

طول الفترة $12 - 0 = 12$

عرض المستطيل $\frac{12}{4} = 3$

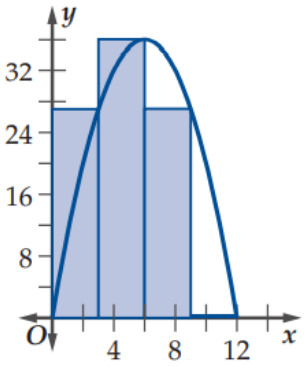
أطوال المستطيلات $f(3), f(6), f(9), f(12)$

$f(3) = -(3)^2 + 12(3) = 27$

$f(6) = -(6)^2 + 12(6) = 36$

$f(9) = -(9)^2 + 12(9) = 27$

$f(12) = -(12)^2 + 12(12) = 0$



المساحة باستعمال 4 مستطيلات

$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

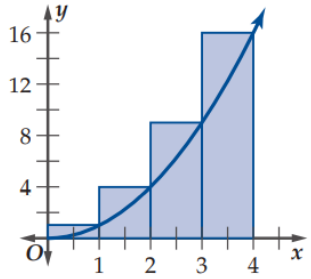
$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية :
270 وحدة مربعة

كلما زاد عدد المستطيلات أي أن المستطيلات أقل عرضًا فتمثل المساحة بشكل أفضل وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية .

قواعد المستطيلات في إيجاد المساحة

استعمال الأطراف اليمنى



$R_1 = 1 \cdot f(1) = 81$

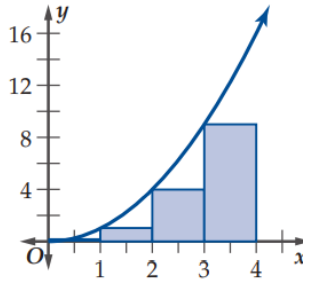
$R_2 = 1 \cdot f(2) = 108$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 81$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 0$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة

استعمال الأطراف اليسرى



$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$

$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

للحصول على تقريب أفضل للمساحة الناتجة نحسب الوسط للقيمتين $\frac{30+14}{2} = 22$

التجزيء المنتظم

هي تقسيم الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول ، ويكون طول كل فترة جزئية $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

التكامل

عملية حساب التكامل أي إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x في الفترة المحددة باستعمال النهايات .

التكامل المحدد (مجموع ريمان)

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a\ ,\ b]$ بالصيغة :

الحد الأعلى ←

الحد الأدنى ←

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad , \quad x_i = a + i\Delta x$$

صيغ المجاميع

$$\sum_{i=1}^{n} c = c\,n \quad , \quad c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = c\sum_{i=1}^{n} i \quad , \quad c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

مثال

استعمل النهايات ، لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد :

$$\int_0^3 x\,dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = 0 + i\frac{3}{n} = \frac{3i}{n}$$

$$\int_0^3 x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n} \cdot \frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{9i}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9n^2}{2n^2} + \frac{9n}{2n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2}{2n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{9n}{2n^2}$$

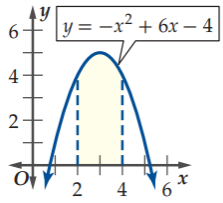
$$= \frac{9}{2} + 0$$

$$= \frac{9}{2}$$

اختبر نفسك

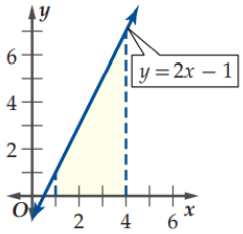
اختر الإجابة الصحيحة :

1 المساحة التقريبية للمنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في الشكل مستعملًا 4 مستطيلات في الطرف الأيسر تساوي تقريبًا .....



A		B		C		D	
7.25 وحدة مربعة		8.25 وحدة مربعة		9.25 وحدة مربعة		10.25 وحدة مربعة	

2 بعد تقريب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في الشكل المجاور الأطراف اليمنى ثم اليسرى حيث عرض المستطيل يساوي 0.5 فإن الوسط للتقريبين بالوحدة المربعة هو :



A		B		C		D	
8		10		12		14	

3 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد $\int_1^3 (2x^2 + 3)dx$ تساوي تقريبًا .....وحدة مربعة.

A		B		C		D	
23.33		24.33		26.67		27.33	

أكمل الفراغات التالية :

1 $\int_1^3 12x\,dx = \cdots\ldots\ldots$

2 $\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) dx = \ldots\ldots\ldots$

أوجد حل ما يلي:

تطبع مطبعة 1000 كتاب يوميًا إذا زاد عدد الكتب المطبوعة من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب

- أوجد قيمة التكلفة بالريال لـ الزيادة المعطاة بالتكامل :

$$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\,dx$$

$$\int$$

$$dx =$$

الدالة الأصلية

الدالة $F(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$ حيث $f(x)$ هي مشتقتها .

$$F'(x) = f(x)$$

مثال

أوجد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 2x$

$$F(x) = \frac{2x^{1+1}}{2} + C = x^2 + C$$

لأنه حين نوجد المشتقة لـ $F(x)$ فنحصل على $f(x)$

هناك عدد لانهائي من الدوال الأصلية .

قواعد الدالة الأصلية

إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 فإن :

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال :

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

إذا كان $f(x) = k\,x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عدد ثابت فإن :

$$F(x) = \frac{k\,x^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال :

$$f(x) = 6x^4$$

$$F(x) = \frac{6\,x^{4+1}}{4+1} + C$$

$$F(x) = \frac{6}{5}x^5 + C$$

إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x), G(x)$ على الترتيب ، فإن:

$F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$

مثال :

$$j(x) = 8x^7 + 6x - 2$$

$$J(x) = \frac{8x^{7+1}}{7+1} + \frac{6x^{1+1}}{1+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$J(x) = x^8 + 3x^2 - 2x + C$$

التكامل

غير محدد

يُعطى التكامل الغير محدد بالصيغة :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$

C عدد ثابت .

مثال

احسب تكامل ما يلي :

$$\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$$

$$= \frac{6x^{2+1}}{2+1} + \frac{8x^{1+1}}{1+1} - \frac{3x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$= 3x^3 + 4x^2 - 3x + C$$

محدد

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)|_a^b$

مثال

احسب تكامل ما يلي :

$$\int_2^3 (6x^2 + 8x - 3)\,dx$$

$$= (3x^3 + 4x^2 - 3x + C)|_2^3$$

$$= (3(3)^3 + 4(3)^2 - 3(3) + C) -$$

$$(3(2)^3 + 4(2)^2 - 3(2) + C)$$

$$= 108 - 34 = 74$$

ملاحظات

- عند حساب التكامل المحدد يمكن إهمال قيمة الثابت C وعدم كتابته في الدالة الأصلية لأنه عند حساب الفرق بين القيمتين يكون الفرق بين قيمتي C يساوي صفر.
- يستخدم التكامل المحدد لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ومحور x في فترة محددة وتعتبر طريقة مختصرة لطريقة المستطيلات والنهايات .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1	الدالة الأصلية للدالة $f(z)=\sqrt[3]{z}$ هي :							
	A	$\frac{5}{3}z^{\frac{3}{5}}+C$	B	$\frac{4}{3}z^{\frac{4}{3}}+C$	C	$\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}+C$	D	$\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}+C$
2	قيمة التكامل : $\int_{-1}^{2}(-x^2+10)dx$ تساوي :							
	A	20	B	27	C	30	D	37
3	قيمة التكامل $\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{2}h^2+\frac{2}{3}h^3-\frac{1}{5}h^4\right)dh$ تساوي :							
	A	6.99	B	7.99	C	8.99	D	9.99

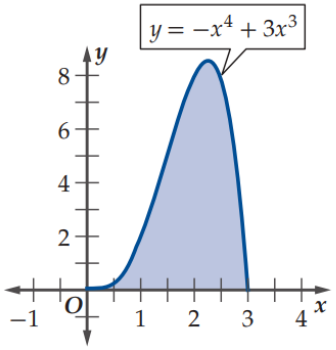
أكمل الفراغات التالية :

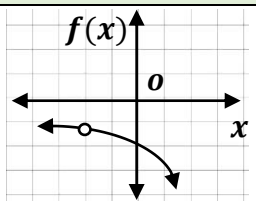
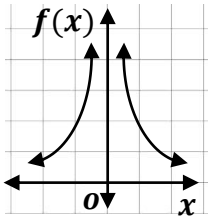
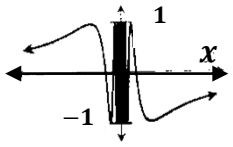
1. $\int_{2}^{5}(a^2-a+6)da=$ .....
2. الدالة الأصلية للدالة $m(t)=16t^3-12t^2+20t-11$ هي .....

أوجد حل ما يلي:

يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه ، حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي .

- ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات ؟

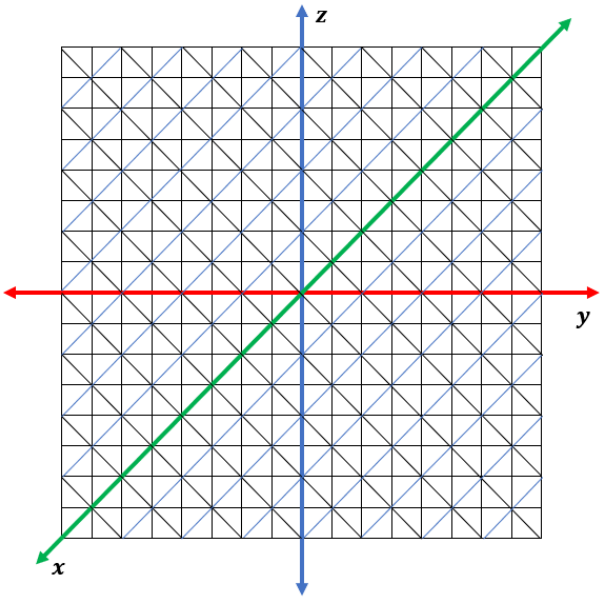


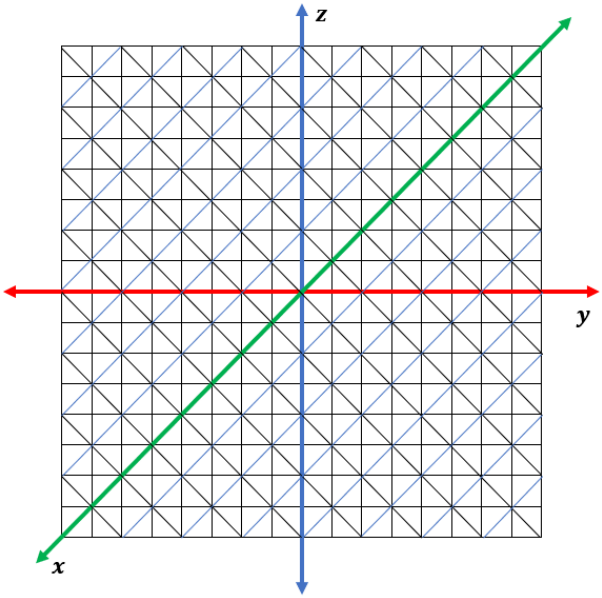
اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
1	في الشكل المجاور : نقدر $\lim_{x\to -2} f(x)$ 						
	A	-2	B	-1	C	0	D	غير موجودة
2	في الشكل المجاور : نقدر $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ بـ ..... 						
	A	$-\infty$	B	0	C	$+\infty$	D	غير موجودة
3	في الشكل المجاور : نقدر $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ ..... $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 						
	A	$-\infty$	B	0	C	$+\infty$	D	غير موجودة
4	النهاية $\lim_{x\to 4}(4x-1)$ تساوي						
	A	4	B	8	C	12	D	15
5	ما قيمة $\lim_{x\to 0}(4^x-\cos x+2x-1)$						
	A	-2	B	-1	C	1	D	2
6	ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+6}{x-1}$						
	A	4	B	0	C	-2	D	-4
7	ما قيمة $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$						
	A	$3+\sqrt{7}$	B	$3-\sqrt{7}$	C	$\sqrt{7}-3$	D	3
8	ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$						
	A	0	B	6	C	4	D	8
9	$\lim_{x\to -1}\frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي						
	A	$\frac{1}{8}$	B	$\frac{1}{12}$	C	∞	D	0
10	$\lim_{x\to \infty}(x^2+x+2)$ تساوي						
	A	$-\infty$	B	0	C	1	D	∞
11	ما قيمة $\lim_{x\to \infty}\frac{10x^3-12x}{5+3x^2-2x^3}$						
	A	-5	B	-2	C	2	D	5

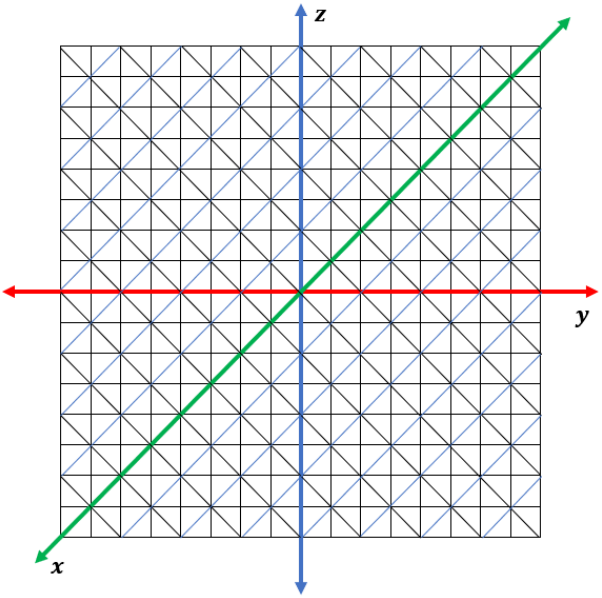
اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
12	أوجد k إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+kx^3}{5-2x+3x^3}=1$						
	A	-4	B	-3	C	3	D	5
13	إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^2}{3+x\lvert x\rvert}=2$ فما قيمة A ؟						
	A	6	B	2	C	-2	D	-6
14	إذا كانت $f(x)=\sqrt{7}$ فإن $f'(x)$ تساوي						
	A	$\sqrt{7}$	B	$\frac{1}{2}\sqrt{7}$	C	0	D	$\frac{1}{2\sqrt{7}}$
15	إذا كانت $f(x)=3x^2-5x+12$ فإن مشتقة الدالة $f(x)$ تساوي						
	A	$3x-5$	B	$6x^2-5$	C	$6x^2-5x$	D	$6x-5$
16	ما معادلة ميل المنحنى $y=x^5+3x-2$ عند أي نقطة عليه ؟						
	A	$5x^4+3$	B	$4x^4+3x$	C	x^4+1	D	x^4+3
17	إذا كانت $g(x)=\sqrt[5]{x^9}$ فإن $g'(x)$ تساوي						
	A	$9\sqrt[5]{x^8}$	B	$5\sqrt[4]{x^9}$	C	$\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^4}$	D	$\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$
18	ما المشتقة السادسة للدالة التالية : $f(x)=\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+7x-12$						
	A	-1	B	0	C	1	D	3
19	إذا كانت $f_1(x)=\sin x$ و $f_2(x)=\cos x$ ، وكانت المشتقة الأولى للدالة المثلثية $\sin x$ هي $\cos x$ والمشتقة الأولى للدالة المثلثية $\cos x$ هي $-\sin x$ ؛ فإن المشتقة الأولى لحاصل الضرب $f_1(x).f_2(x)$ يساوي						
	A	$\sin^2 x$	B	$\sin^2 x+\cos^2 x$	C	$-\cos^2 x$	D	$\cos^2 x-\sin^2 x$
20	يستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد النقاط العظمى والصغرى لأي دالة $f(x)$ على النحو التالي : إذا كانت $\frac{df(a)}{dx}=0$ و $\frac{d^2f(a)}{dx^2}>0$ فالدالة f لها نقطة صغرى عند a ، وإذا كانت $\frac{df(b)}{dx}=0$ و $\frac{d^2f(b)}{dx^2}<0$ فالدالة f لها نقطة عظمى عند b ، وبناءً على ذلك ما النقاط العظمى (على الترتيب) للدالة $f(x)=2+3x-x^3$ ؟						
	A	$+1\,,-1$	B	$-1\,,+1$	C	$+3\,,-3$	D	$-3\,,+3$
21	إذا كانت $f(x)=6x^2-x^3$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[0\,,3]$ ؟						
	A	64	B	32	C	27	D	21
22	تعطى المسافة التي يتحركها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $f(x)=18t-2t^2-1$ أوجد معادلة السرعة اللحظية لهذا الجسم ؟						
	A	$18t-4$	B	$18-4t$	C	$4t$	D	$2t-1$
23	إذا كانت $F(x)=2x^5-x^3-102$ فإن : $f'(1)$ تساوي						
	A	-102	B	-39	C	-7	D	7

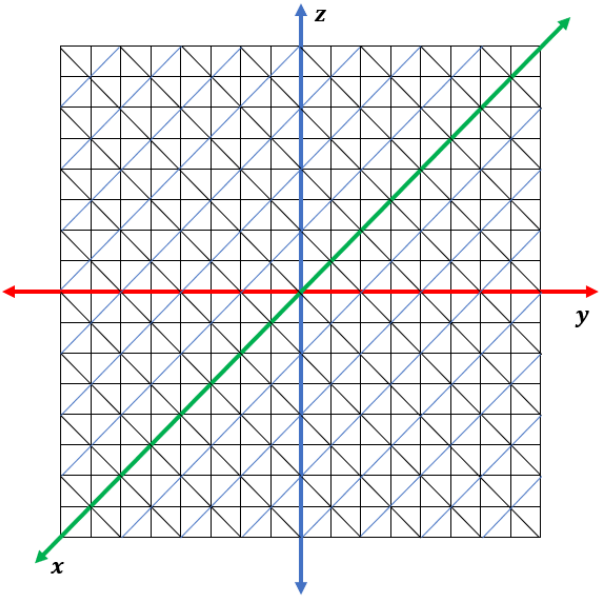
المرفقات

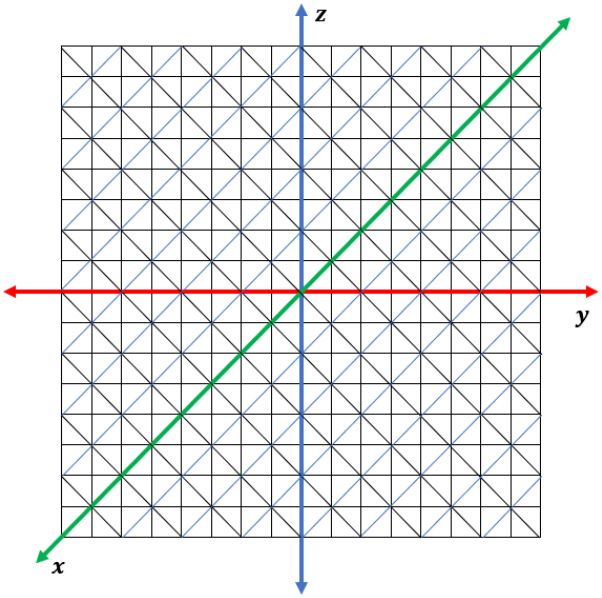
مرفقات

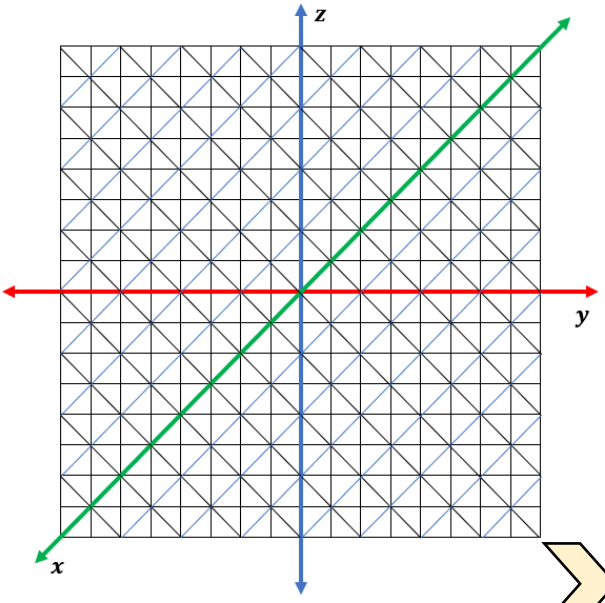


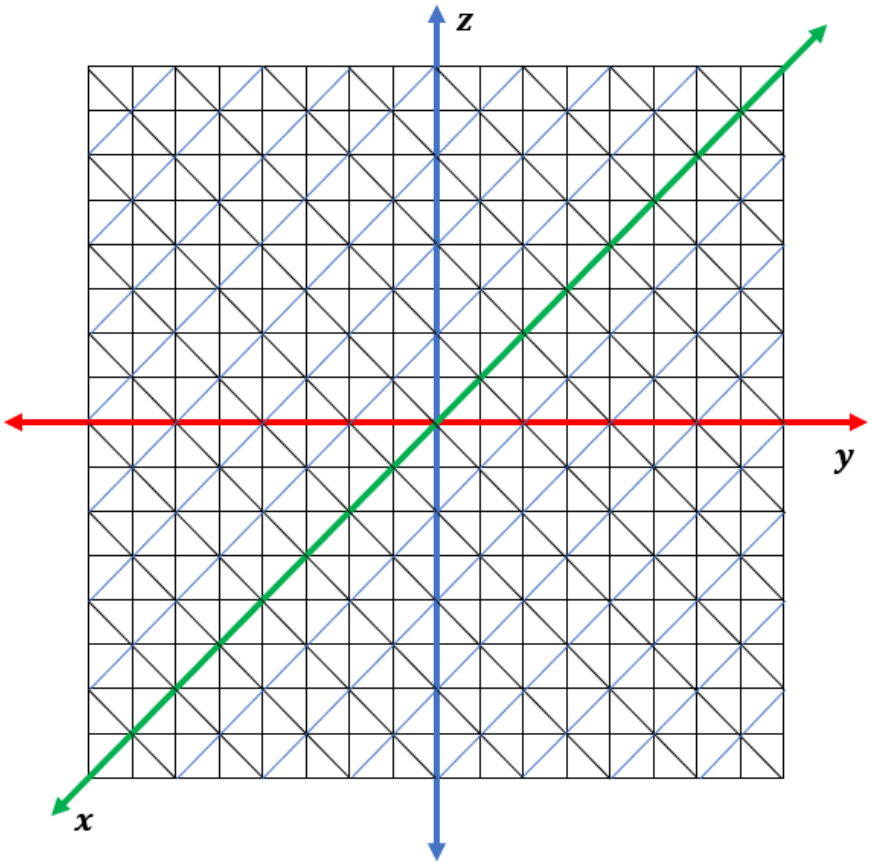


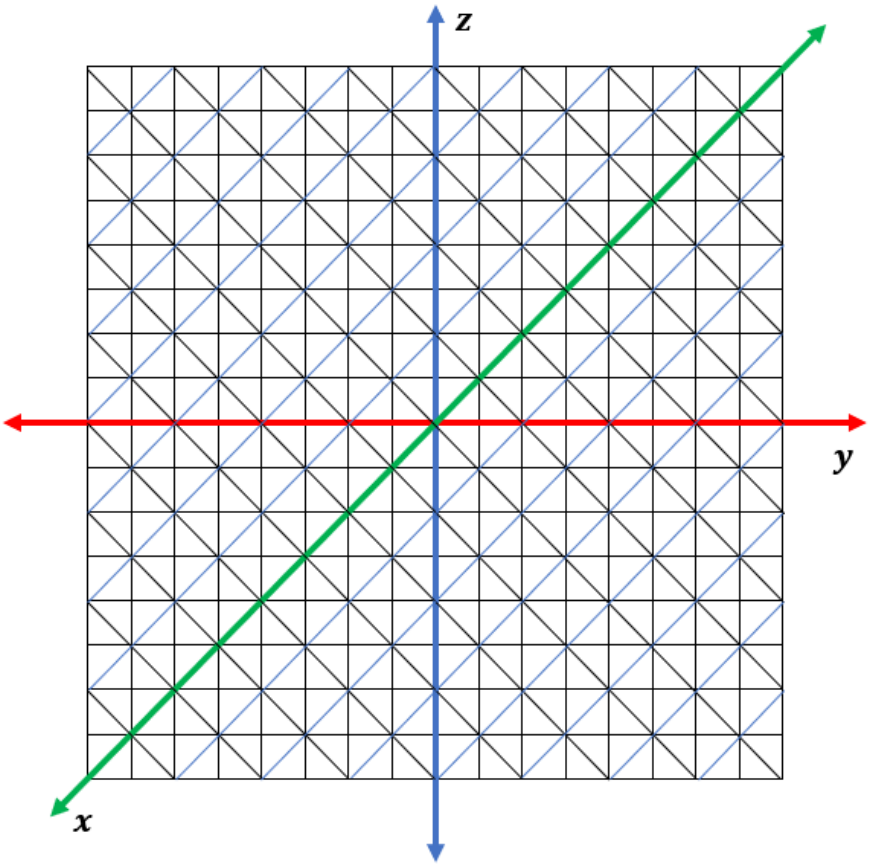


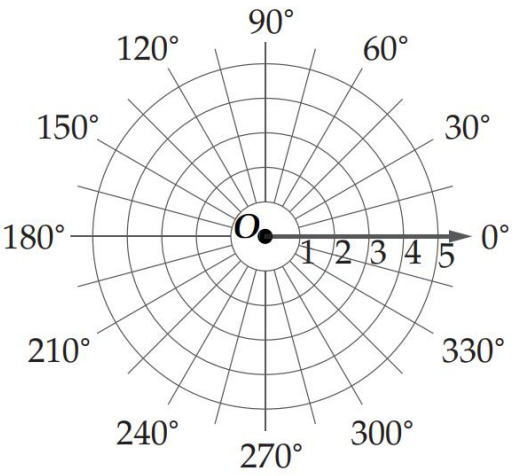


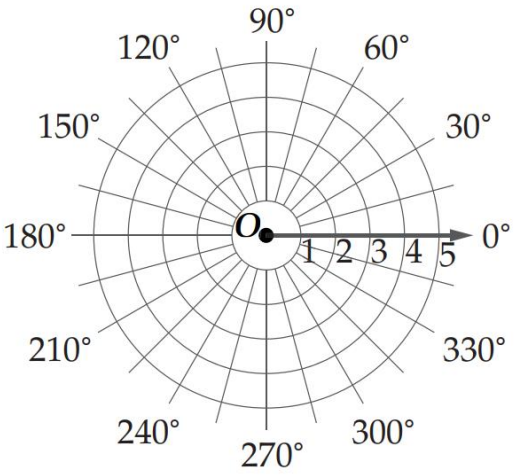


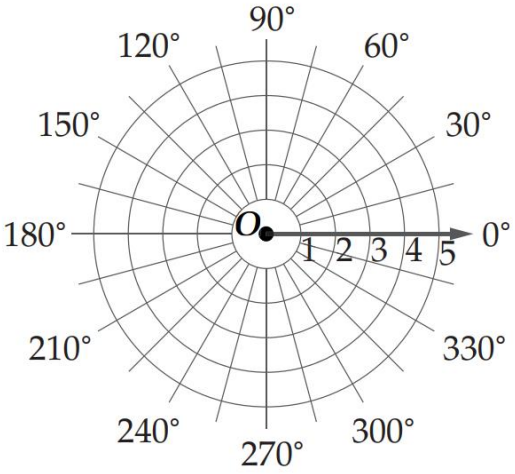


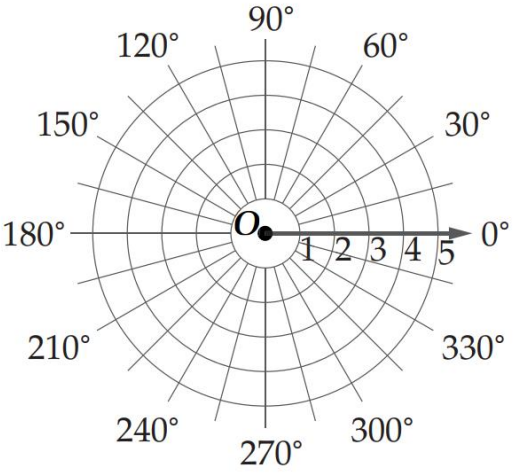

z
y
x

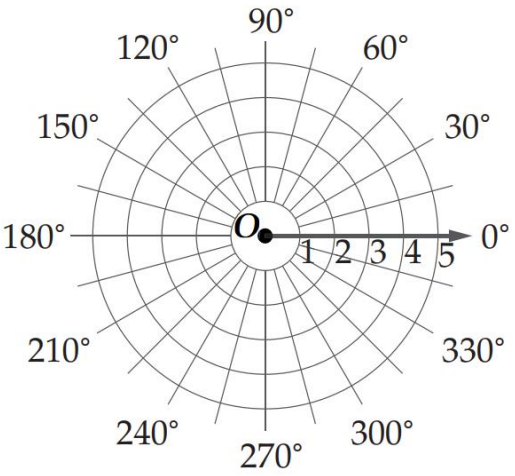

z
y
x

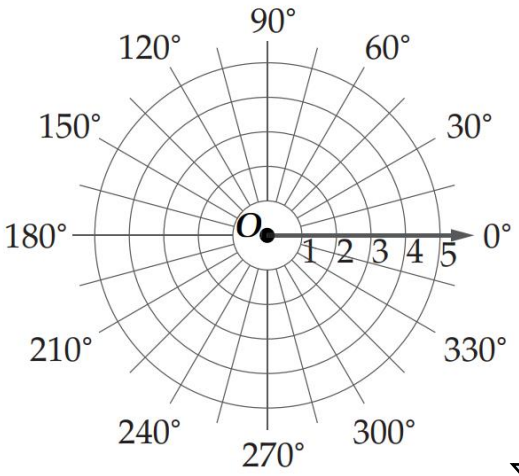

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1 2 3 4 5
210°
330°
240°
300°
270°

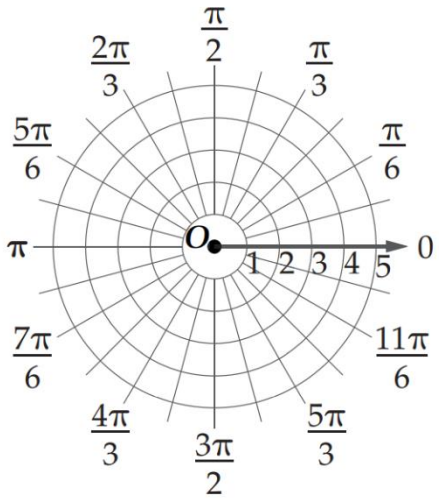

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1 2 3 4 5
210°
330°
240°
300°
270°

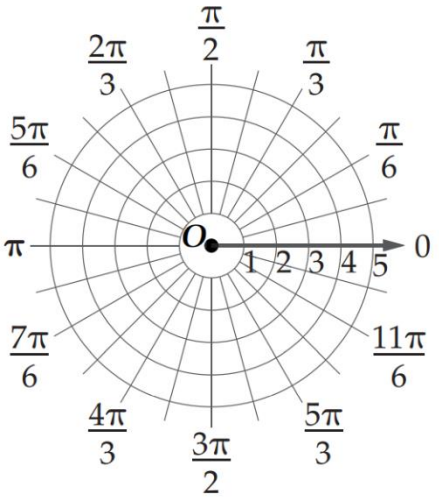

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1 2 3 4 5
210°
330°
240°
300°
270°

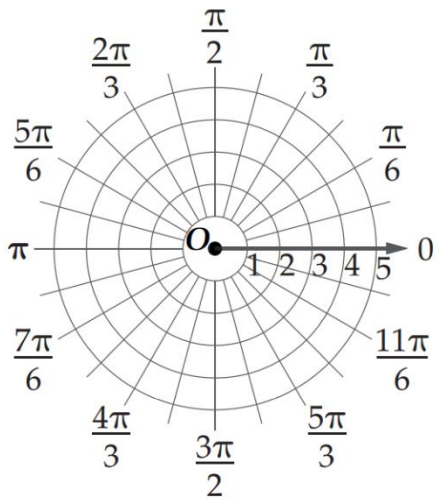

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1 2 3 4 5
210°
330°
240°
300°
270°

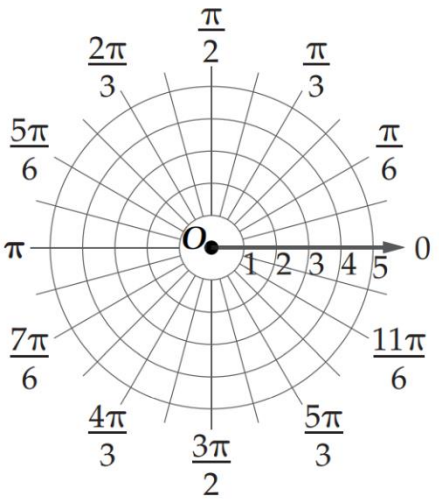

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1 2 3 4 5
210°
330°
240°
300°
270°

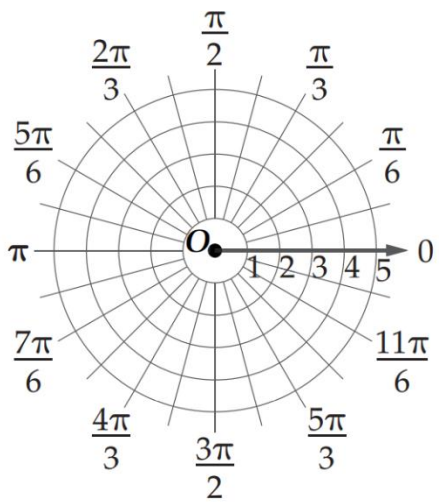

90°
120°
60°
150°
30°
180°
0°
O
1 2 3 4 5
210°
330°
240°
300°
270°

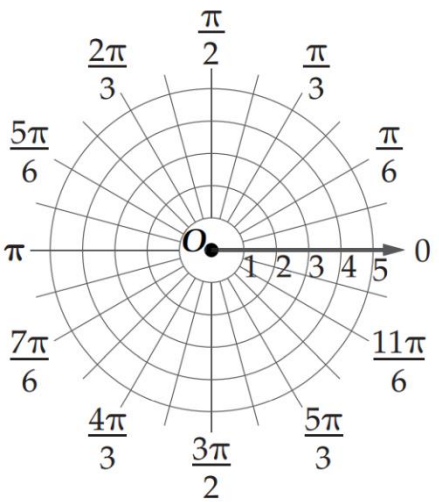

π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
0
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
0
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
0
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
0
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
0
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2


π/2
2π/3
π/3
5π/6
π/6
π
O
0
1 2 3 4 5
7π/6
11π/6
4π/3
5π/3
3π/2

ملحق الإجابات

الفصل الأول

المتجهات

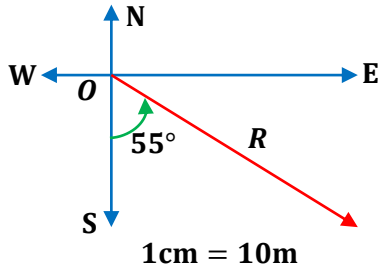
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مساحة مربع $20\ m^2$ تسمى هذي الكمية بـ

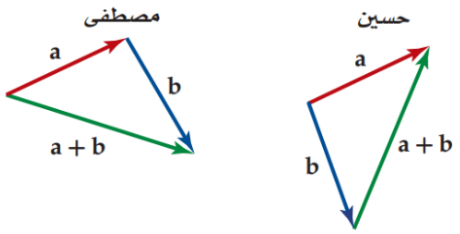
A	كمية قياسية	B	كمية متجهة	C	كمية مركبة	D	كمية قطبية

2 زاوية الاتجاه الربعي في الشكل المقابل تكتب بالصورة :



A	145°	B	S 55°E	C	N 55°E	D	055°

3 حاول كل من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين في الشكل المقابل فكان:



A	مصطفى إجابته صحيحة	B	حسين إجابته صحيحة	C	كلاهما صحيح	D	كلاهما خاطئ

أكمل الفراغات التالية :

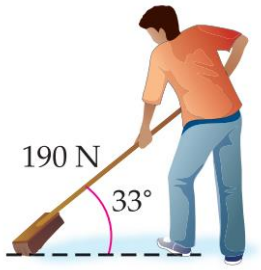
1 مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين 18 N للأمام ثم 20 N للخلف يساوي 2 واتجاهها للخلف

2 المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه هما المتجهان الـ متساويان

أوجد حل ما يلي:

يدفع حسن مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل.

- أوجد مقدار كل من المركبة الأفقية والراسية؟



مقدار المركبة الأفقية $\approx$ 159.3 N

مقدار المركبة الرأسية $\approx$ 103.5 N

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(2,-7)$ ونقطة نهايته $B(-6,9)$ هي :

A	B	C	D
$\langle -8,-16\rangle$	$\langle -8,16\rangle$	$\langle 8,16\rangle$	$\langle 16,8\rangle$

2 إذا كان $h=\langle -6\,,2\rangle, g=\langle -3\,,-5\rangle, f=\langle 8\,,0\rangle$ فإن $2f+g-3h$ تساوي :

A	B	C	D
$\langle -31\,,11\rangle$	$\langle -31\,,-11\rangle$	$\langle 31\,,-11\rangle$	$\langle 30\,,12\rangle$

3 عند كتابة $\overrightarrow{DE}$ الذي نقطة بدايته $D(4,-1)$ ونقطة نهايته $E(5,-7)$ على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $i\,,j$ تصبح :

A	B	C	D
$i-6j$	$i-5j$	$i-j$	$i+6j$

4 الصورة الإحداثية للمتجه v الذي طوله $|v|=16$ وزاوية اتجاهه $\theta=330°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x هي:

A	B	C	D
$\langle 8\sqrt{3},6\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},8\rangle$	$\langle \sqrt{3},-8\rangle$	$\langle 8\sqrt{3},-8\rangle$

أكمل الفراغات التالية :

1 طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-3,1)$ ونقطة نهايته $B(4,5)$ يساوي $\sqrt{65}\approx 8.1$

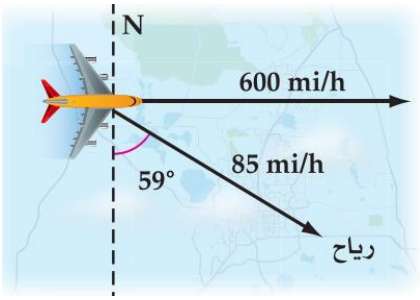
2 متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه المتجه $v=\langle 1,7\rangle$ هو $u=\langle \frac{\sqrt{2}}{10},\frac{7\sqrt{2}}{10}\rangle$

3 زاوية اتجاه المتجه $-4i-3j$ مع الاتجاه الموجب للمحور x تساوي $216.9°$ تقريبًا

أوجد حل ما يلي:

تطير طائرة جهة الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S 59° E

- أوجد محصلة سرعة الطائرة.
- أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة



محصلة سرعة الطائرة : 674 mi/h

زاوية اتجاه مسار الطائرة : S 86° E

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $v = \langle 7, 5 \rangle, u = \langle 4, -4 \rangle$ هو :

A	B	C	D
8	10	-8	6

2 طول المتجه $r = \langle -9, -4 \rangle$ هو :

A	B	C	D
9.8	8.9	8.5	5.8

3 المتجهان $u = 11i + 7j , v = -7i + 11j$:

A	B	C	D
متوازيان	متساويان	متعامدان	متعاكسان

أكمل الفراغات التالية :

1 الزاوية θ بين المتجهين $u = \langle 7, 10 \rangle , v = \langle 4, -4 \rangle$ تساوي تقريبًا $100°$

2 المتجه الذي يعامد المتجه $\langle 7, -4 \rangle$ هو $\langle 8, 14 \rangle$ وهناك إجابات أخرى صحيحة.

أوجد حل ما يلي:

يدفع طارق برميلًا على أرض مستوية مسافة 1.5m بقوة مقدارها 534 N بزاوية $25°$.

- أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق وقرب الناتج الى أقرب عدد صحيح .

الشغل يساوي 726 J

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

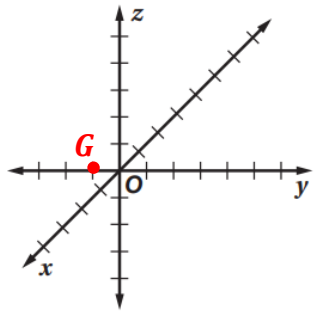
1 طول القطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها $(-4, 10, 4)$ ونقطة نهايتها $(1, 0, 9)$ تساوي :

A	B	C	D
10.75	12.25	13.25	10

2 إذا كانت $M(3,4,5), N(\frac{7}{2}, 1, 2)$ وكانت N منتصف $\overline{MP}$ فإن إحداثيات النقطة P هي :

A	B	C	D
$(3,4,5)$	$(\frac{7}{2}, 1, 2)$	$(4, -2, -1)$	$(4, 1, -1)$

3 إحداثيات النقطة G في المستوى الثلاثي الأبعاد هي:



A	B	C	D
$(0, -1, 5)$	$(-3, -3, -2)$	$(0, 1, 0)$	$(3, 2, 1)$

أكمل الفراغات التالية :

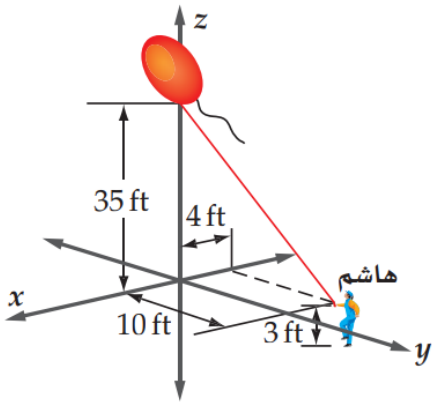
1 إذا كانت $A(3, 5, 1)$ نقطة بداية القطعة المستقيمة و$B(0, 0, -9)$ نقطة النهاية فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو : $\mathbf{u} = \langle \frac{-3\sqrt{134}}{134}, \frac{-5\sqrt{134}}{134}, \frac{-5\sqrt{134}}{67} \rangle$

2 إذا كان $c = \langle -2, 2, 4 \rangle, b = \langle 6, -2, -7 \rangle, a = \langle -5, -4, 3 \rangle$ ، فإن $6a - 7b + 8c$ تساوي $\langle 88, 6, 99 \rangle$

أوجد حل ما يلي:

تطوع هاشم لحمل بالون كدليل في استعراض رياضي .
إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الارض ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض كما في الشكل أدناه .

- أوجد طول الحبل إلى أقرب قدم.



طول الحبل يساوي 34 ft

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $u = \langle 5, 0, -4 \rangle, v = \langle 6, -1, 4 \rangle$ هو :

A		B		C		D	
-14		-12		12		14	

2 مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $u = \langle -9, 1, 2 \rangle, v = \langle 6, -5, 3 \rangle$ حيث ان u, v ضلعان متجاوران :

A		B		C		D	
$13\sqrt{19}$		$13\sqrt{16}$		$13\sqrt{15}$		$\sqrt{19}$	

3 إذا كان $u = \langle 3, 2, -2 \rangle, v = \langle -4, 4, 5 \rangle$ فإن $u.(u \times v)$ تساوي :

A		B		C		D	
غير ممكن		2		1		0	

أكمل الفراغات التالية :

1 الضرب الاتجاهي للمتجهين $u = \langle -1, 3, 5 \rangle, v = \langle -2, -6, -3 \rangle$ هو $\langle 21, 7, 0 \rangle$

2 حجم متوازي السطوح الذي فيه t, u, v أحرف متجاورة وحيث $v = \langle -9, 5, -4 \rangle$
$t = \langle 2, -3, -1 \rangle, u = \langle 4, -6, 3 \rangle$ يساوي 85 وحدة مكعبة

أوجد حل ما يلي:

إذا كان $u = \langle 6, -5, 1 \rangle, v = \langle -8, -9, 5 \rangle$

- أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u, v ، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

قياس الزاوية بين المتجهين u, v تساوي تقريبًا $88.9°$

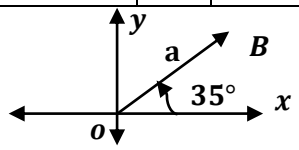
اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1 أي الكميات التالية كمية متجهة ؟

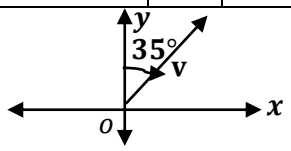
A	الزمن	B	المسافة	C	الإزاحة	D	الكتلة

2 في الشكل : قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه ..



A	35°	B	035°	C	055°	D	090°

3 في الشكل المجاور : الاتجاه الربعي للمتجه ....



A	N 35° E	B	N 55° E	C	W 55° S	D	N 35° W

4 إذا كان اتجاه متجه $120°$ ، فإن اتجاهه الربعي ....

A	N 30° W	B	N 30° E	C	N 60° W	D	N 60° E

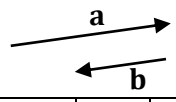
5 إذا كان اتجاه متجه $180°$ ، فإن قياس زاوية اتجاهه الحقيقي ...

A	90°	B	180°	C	270°	D	300°

6 إذا كان قياس زاوية الاتجاه الحقيقي لمتجه $155°$ ، فإن اتجاهه الربعي ..

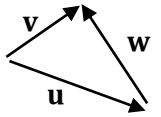
A	N 55° E	B	S 25° E	C	W 55° S	D	N 35° E

7 في الشكل المجاور : أي الخيارات التالية تمثل العلاقة بين المتجهين a , b



A	متوازيان	B	متساويان	C	a معكوس لـ b	D	متطابقان

8 في الشكل المجاور : المتجه الذي يمثل محصلة المتجهين الآخرين هو .....



A	v	B	u	C	w	D	w + v

9 تسير باخرة بزاوية قيمتها $60°$ مع الأفقي وبسرعة $100\ km/h$ ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة ؟

A	$50\ km/h$	B	$50\sqrt{3}\ km/h$	C	$200\ km/h$	D	$200\sqrt{3}\ km/h$

10 أي المتجهات التالية طوله 6 وحدات؟

A	$\langle 2 , 4 \rangle$	B	$\langle \sqrt{5} , 1 \rangle$	C	$\langle 3\sqrt{3} , 3 \rangle$	D	$\langle 2 , \sqrt{3} \rangle$

11 إذا كان لدينا المتجهين $B = \langle 1 , 4 \rangle , A = \langle 5 , -3 \rangle$ فإن : $2A - B$

A	$\langle 9 , -10 \rangle$	B	$\langle 6 , 1 \rangle$	C	$\langle 4 , -7 \rangle$	D	$\langle -3 , 11 \rangle$

12 متجه الوحدة u باتجاه المتجه $v = \langle 3 , -4 \rangle$ يساوي ...

A	$\langle -1 , 0 \rangle$	B	$\langle 1 , -1 \rangle$	C	$\langle -\frac{3}{5} , \frac{4}{5} \rangle$	D	$\langle \frac{3}{5} , \frac{-4}{5} \rangle$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
13	المتجه $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2j$ بالصورة الإحداثية يساوي ..						
	A	$\langle 5 , 2 \rangle$	B	$\langle 2 , 5 \rangle$	C	$\langle 5 , -2 \rangle$	D	$\langle -2 , 5 \rangle$
14	ما الصورة الإحداثية لمتجه v طوله 14 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $210°$						
	A	$\langle 7 , 7\sqrt{3} \rangle$	B	$\langle -7\sqrt{3} , -7 \rangle$	C	$\langle -7\sqrt{3} , 7 \rangle$	D	$\langle 14 , 210 \rangle$
15	إذا كان $\mathbf{v} = \langle 5 , 7 \rangle , \mathbf{u} = \langle 3 , -2 \rangle$ فإن : $\mathbf{u} . \mathbf{v}$ يساوي						
	A	-14	B	-1	C	1	D	15
16	إذا كان المتجهان $\mathbf{v} = \langle 3 , k \rangle , \mathbf{u} = \langle 1 , -2 \rangle$ متعامدين فما قيمة k ؟						
	A	-2	B	$-\frac{3}{2}$	C	$\frac{3}{2}$	D	2
17	ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3 , 3 \rangle , \langle 2 , 0 \rangle$						
	A	$30°$	B	$45°$	C	$120°$	D	$135°$
18	أي مما يلي يمثل المتجه $\overrightarrow{AB}$ ، إذا كان $B(-5 , 2 , 1) , A(3 , 4 , -4)$ ؟						
	A	$\langle -8 , -2 , 5 \rangle$	B	$\langle 8 , -2 , -3 \rangle$	C	$\langle 8 , 2 , -3 \rangle$	D	$\langle -8 , -2 , -3 \rangle$
19	طول المتجه $w = 5\mathbf{i} + 3j - \sqrt{2}k$ يساوي						
	A	$8 - \sqrt{2}$	B	6	C	$8 + \sqrt{2}$	D	$4\sqrt{2}$
20	إذا كان $\mathbf{v} = \langle -2 , -1 , 3 \rangle , \mathbf{u} = \langle b , -3 , 1 \rangle$ ، فما قيمة b التي تجعل المتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ متعامدين ؟						
	A	-6	B	-3	C	3	D	6
21	بعد عدة دقائق من إطلاق بالونين يحويان هواءً ساخنًا في الهواء كانت إحداثيات البالونين هي $B(-30 , 15 , 10) , A(20 , 25 , 30)$. أوجد المسافة بين البالونين في تلك اللحظة.						
	A	$10\sqrt{30}$	B	$30\sqrt{10}$	C	300	D	3000
22	أوجد $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$						
	A	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	B	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$	C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	D	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
23	إذا كان $\mathbf{v} = \langle 2 , 0 , -1 \rangle , \mathbf{u} = \langle 1 , -2 , 0 \rangle$ متجهين ، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوي						
	A	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	B	$-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$	C	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$	D	$-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
24	متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، ضلعان متجاوران ، ما مساحته بالوحدات المربعة ؟						
	A	13	B	21	C	$\sqrt{186}$	D	$\sqrt{458}$
25	حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $t = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. أحرف متجاورة يساوي ..... وحدة تكعيبية .						
	A	31	B	62	C	73	D	86

ملحق الإجابات

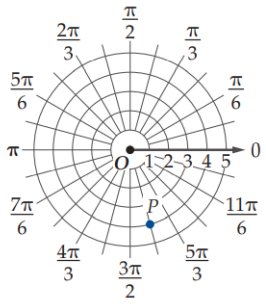
الفصل الثاني

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 جميع الإحداثيات التالية صحيحة للنقطة P في المستوى القطبي ماعدا .....

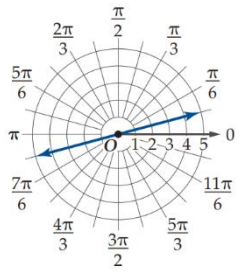


A	$\left(-4, \frac{\pi}{12}\right)$	B	$\left(-4, \frac{7\pi}{12}\right)$	C	$\left(4, -\frac{5\pi}{12}\right)$	D	$\left(4, \frac{19\pi}{12}\right)$

2 إذا كانت $0° \leq \theta \leq 180°$ فإن الزوج الآخر من الإحداثيات القطبية للنقطة $(5, 960°)$

A	$(-5, 60°)$	B	$(5, 60°)$	C	$(5, 90°)$	D	$(-5, 30°)$

3 معادلة التمثيل القطبي للشكل المجاور هي .....



A	$\theta = \frac{\pi}{4}$	B	$\theta = \frac{\pi}{9}$	C	$\theta = \frac{\pi}{12}$	D	$\theta = \frac{19\pi}{12}$

أكمل الفراغات التالية :

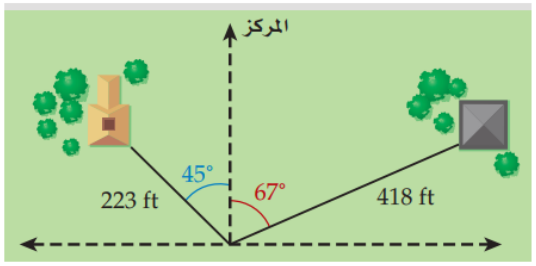
1 نقطة الأصل في النظام الديكارتي يقابلها **القطب** في النظام القطبي.

2 المعادلة $r = 2$ تمثيلها يكون على شكل **دائرة**

أوجد حل ما يلي:

أراد مساح تحديد حدود قطعة أرض ، فحدد أثرًا يبعد 223 ft بزاوية 45° إلى يسار المركز ، وأثرًا آخر على بعد 418 ft ، بزاوية 67° إلى يمين المركز ، كما في الشكل أدناه .

- أوجد المسافة بين الأثرين .



المسافة بين الأثرين تساوي تقريبًا 542.5 ft

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الإحداثي الديكارتي للإحداثي القطبي $(-2, \frac{4\pi}{3})$ هو :

A		B		C		D	
$(1, -\sqrt{3})$		$(-1, \sqrt{3})$		$(-1, -\sqrt{3})$		$(1, \sqrt{3})$	

2 المعادلة $y = -3$ على الصورة القطبية هي :

A		B		C		D	
$r = -3 \tan\theta$		$r = -3 \csc\theta$		$r = -3 \sec\theta$		$r = -3 \cos\theta$	

أكمل الفراغات التالية :

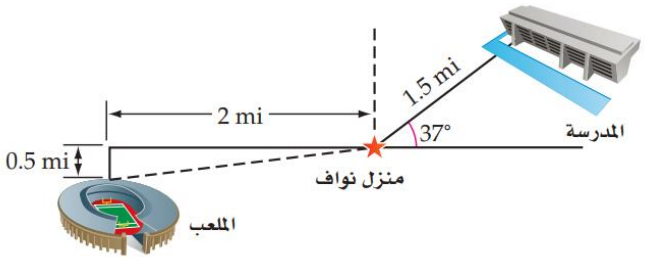
1 الإحداثي القطبي للإحداثي الديكارتي $(2, -3)$ هو $(3.61 , -56.3°)$

2 الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $\theta = \frac{3\pi}{4}$ هي $y = -x$

أوجد حل ما يلي:

إذا كانت مدرسة نواف تبعد 1.5mi عن منزله، وتصنع زاوية مقدارها $53°$ شمال الشرق كما في الشكل أدناه فأجب عما يأتي :

- إذا سلك نواف طريقًا للشرق ثم للشمال كي يصل الى المدرسة ، فكم ميلًا يتحرك في كل اتجاه؟
- إذا كان الملعب على بعد 2mi غربًا و 0.5mi جنوبًا ومنزل نواف يمثل القطب ، فما إحداثيات موقع الملعب على الصورة القطبية؟



يتحرك نواف 1.2 mi شرقًا و 0.90 mi شمالًا

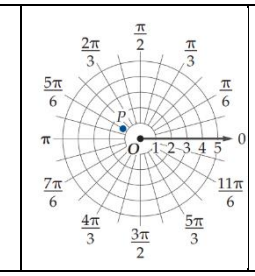
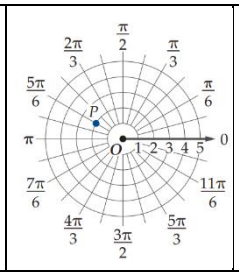
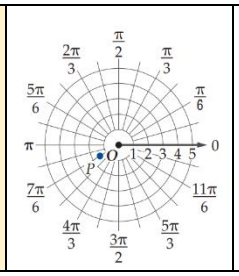
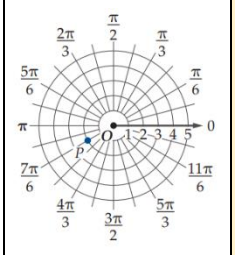
إحداثيات موقع الملعب بالصورة القطبية :
$(2.06 , 194.04°)$

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 تمثيل العدد المركب $(-\sqrt{3}, -1)$ في المستوى القطبي :

A 
B 
C 
D 

2 القيمة المطلقة للعدد المركب $z = -7 + 5i$ تساوي تقريباً .....

A	B	C	D
8.6	7.3	6.6	4.8

3 ناتج $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$ .....

A	B	C	D
-16	-64	256	274

أكمل الفراغات التالية :

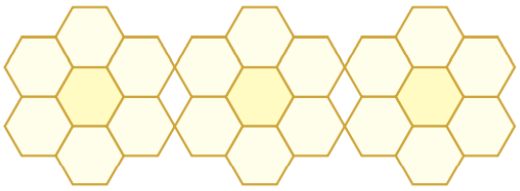
1 ناتج $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ هو $24\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2 الصورة القطبية للعدد المركب $4 + 4i$ هي $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3 الجذور الرباعية للعدد $4\sqrt{3} - 4i$ هي $1.67 - 0.22i$ ، $0.22 + 167i$ ، $1.67 + 0.22i$ ، $-0.22 - 1.67i$

أوجد حل ما يلي:

يعمل سالم في وكالة للإعلانات ويرغب في تصميم لوحة مكونة من أشكال سداسية كما هو مبين في الشكل ويستطيع تعيين رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية بتمثيل حلول المعادلة $x^6 - 1 = 0$ في المستوى المركب .



- أوجد رؤوس أحد هذه الأشكال السداسية .

$$1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اختر الإجابة الصحيحة:								
1	تمثيل النقطة $(2\,,50°)$ في المستوى القطبي هو نفسه تمثيل النقطة ...							
	A	$(50\,,2°)$	B	$(2\,,130°)$	C	$(-2\,,-50°)$	D	$(-2\,,230°)$
2	المعادلة القطبية $r=4$ تمثيلها البياني عبارة عن دائرة طول قطرها ..							
	A	2	B	3	C	4	D	8
3	التمثيل البياني للمعادلة القطبية $\theta=30°$ عبارة عن ..							
	A	دائرة قطرها 15	B	دائرة قطرها 30	C	مستقيم يميل بزاوية $30°$	D	مستقيم يميل بزاوية $15°$
4	المسافة بين النقطتين $P_2=(3\,,60°)\,,P_1=(0\,,40°)$ تساوي ..							
	A	0	B	3	C	40	D	60
5	الاحداثيات الديكارتية للنقطة $T(-4\,,60°)$ هي							
	A	$(-2\,,-2\sqrt{3})$	B	$(-2\sqrt{3}\,,-2)$	C	$(2\,,2\sqrt{3})$	D	$2\sqrt{3}\,,2$
6	إذا كان للنقطة P الاحداثيات الديكارتيه $(\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$ فإن الاحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ للنقطة P هي ...							
	A	$(\sqrt{2}\,,30°)$	B	$(2\,,30°)$	C	$(\sqrt{2}\,,45°)$	D	$(2\,,45°)$
7	الصورة القطبية للمعادلة $x^2+y^2=9$							
	A	$r=9$	B	$r=\pm3$	C	$r=3\cos\theta$	D	$r=3\sin\theta$
8	ما الصورة الديكارتية للمعادلة $\theta=\frac{\pi}{6}$							
	A	$x+y=3$	B	$y=\sqrt{3}\,x$	C	$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$	D	$x^2+y^2=3\sin\theta$
9	القيمة المطلقة للعدد المركب $3+4i$ تساوي							
	A	2	B	3	C	4	D	5
10	سعه المركب $z=7\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$							
	A	$30°$	B	$60°$	C	$90°$	D	$120°$
11	الصورة الديكارتية للعدد المركب $2(\cos 45°+i\sin 45°)$ هي							
	A	$\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$	B	$2i\sqrt{2}$	C	$2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$	D	$2+2i$
12	قيمة المقدار $[2(\cos 22.5°+i\ \sin 22.5°)]^4$							
	A	-16	B	$-16\,i$	C	16	D	$16i$
13	عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ فإن مقياس الجذر الثاني يساوي							
	A	1	B	2	C	4	D	8
14	عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب $3(\cos\pi+i\sin\pi)$ ، فإن سعة الجذر الأول تساوي							
	A	$\frac{\pi}{5}$	B	$\frac{\pi}{3}$	C	π	D	5π
15	عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي							
	A	1	B	2	C	3	D	4

ملحق الإجابات

الفصل الثالث

الاحتمال والإحصاء

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1. اختر 100 طالب نصفهم في نادي اللغة الإنجليزية وقارن بين درجاتهم في اللغة الإنجليزية دراسة ...

A	تجريبية متحيزه	B	قائمة على الملاحظة	C	مسحية	D	تجريبية غير متحيزه

2. أي سؤال مما يأتي يحدد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب بدون تحيز ؟

A	هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟	B	أيها تفضل أكثر العلوم أو الرياضيات ؟	C	ما مادتك المفضلة ؟	D	لا شيء مما سبق

3. أي من العبارات التالية تظهر (سببية) .....

A	كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً.	B	إذا رفعت أثقالًا أستطيع الالتحاق بفريق كرة القدم .	C	عندما يكون الجو باردًا وممطرًا بغزارة لا نذهب الى المدرسة.	D	عندما أمارس الرياضة اكون في وضع نفسي أفضل.

أكمل الفراغات التالية :

1. (الاستفسار من طلاب صف معين من المتميزين في مادة العلوم عن أفضل المواد الدراسية لديهم) تعتبر دراسة مسحية متحيزة

2. (تريد معرفة ما إذا كان عدد سنوات الركض يؤثر في حركة الركبة أم لا) هذه الحالة تتطلب دراسة قائمة على الملاحظة

أوجد حل ما يلي:

قبل الاختبار ، قام المعلم باختيار شعبتين من الصف نفسه بشكل عشوائي ، وقام بمراجعة المادة لطلاب إحداهما ، بينما لم يراجع المادة لطلاب الشعبة الأخرى . ثم قام بمقارنة النتائج .

الدراسة السابقة تجريبية

- حدد المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة
- بين ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزة أم لا .

المجموعة التجريبية هي الشعبة التي قام المعلم بمراجعة المادة لطلابها .

المجموعة الضابطة هي الشعبة الأخرى.

الدراسة متحيزة لأن كل طالب يعرف المجموعة التي ينتمي إليها .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مقياس النزعة المركزية الذي يصف البيانات 833, 796, 781, 776, 758 في أفضل صورة هو :

A	B	C	D
الانحراف المعياري	المتوسط	الوسيط	المنوال

2 في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أي مما يأتي لا يؤثر في الوسيط؟

A	B	C	D
مضاعفة كل عدد	زيادة كل عدد بمقدار 10	زيادة القيمة الصغرى فقط	زيادة القيمة الكبرى فقط

3 في الجدول درجات صف مكون من 10 طلاب في اختبار من 25 درجة
الانحراف المعياري للبيانات يساوي .....

درجات 10 طلاب في اختبار من 25 درجة									
20	17	21	22	20	21	20	21	21	23

A	B	C	D
1.76	1.05	1.93	2.45

أكمل الفراغات التالية :

1 مقياس النزعة المركزية الذي يُعرف بأنه القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا بين القيم هو **المنوال**

2 المقياس الذي يصف خاصية في المجتمع هو **المعلمة**

أوجد حل ما يلي:

في دراسة مسحية عشوائية شملت 5824 شخصًا ، أفاد 29% منهم أنهم سيشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز.

- ما هامش خطأ المعاينة ؟
- ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز ؟

هامش خطأ المعاينة $\approx \pm 1.31\%$

الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين سوف يشاهدون الألعاب الأولمبية على التلفاز
تقع بين 27.7% و 30.3%

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و 6 كرات حمراء، و 10كرات صفراء ، و 6 كرات بيضاء ، و 5 كرات خضراء إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا، فإن احتمال أن تكون حمراء إذا علمت أنها ليست خضراء .....

A	B	C	D
$\frac{6}{35}$	$\frac{11}{29}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$

2 يبين الجدول عدد الطلاب الذين حضروا مباراة كرة قدم والذين تغيبوا عنها من السنوات الجامعية الأولى والثانية والثالثة والرابعة فإذا اختير أحد الطلاب عشوائيًا فإن احتمال أن يكون قد حضر المباراة علمًا بأنه من السنة الثالثة يساوي تقريبًا .....

	أولى	ثانية	ثالثة	رابعة
الحضور	48	90	224	254
الغياب	182	141	36	8

A	B	C	D
48.6%	77.6%	86.2%	91.6%

أكمل الفراغات التالية :

1 إذا ألقيت أربع قطع نقد متمايزة مرة واحدة فإن احتمال ظهور شعارين علمًا بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل $\frac{2}{5}$

2 رُقمت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 الى 8 ، إذا أدير مؤشر القرص ، فإن احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلم أنه استقر عند عدد زوجي $\frac{1}{4}$

أوجد حل ما يلي:

يوضح الجدول أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة ، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ.

إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًا فأوجد احتمال كل مما يلي:

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

- الشخص راسب علمًا، بأنه لم يأخذ حصصًا.
- لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح.

احتمال الشخص راسب علمًا، بأنه لم يأخذ حصصًا $\frac{2}{5}$

احتمال لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح $\frac{3}{7}$

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 صندوق به 10 كرات ، منها 6 حمراء، إذا سُحبت منه كرتان معًا عشوائيًا، فإن احتمال أن تكون الكرتان حمراوين :

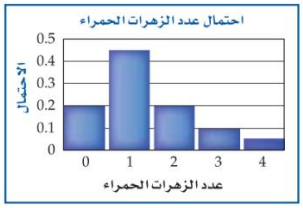
A	B	C	D
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{4}$

2 أجرى موقع إلكتروني مسحًا للمصادر التي يحصل منها الناس على الأخبار بشكل رئيس ، والجدول المجاور يبين نتائج المسح إ ذا اختير أحدالذين شملهم هذا المسح عشوائيًا، فإن احتمال أن يكون مصدر أخباره الرئيس الصحف أو الإنترنت هو .....

المصدر	الاحتمال
التلفاز	0.35
المذياع	0.31
الأصدقاء	0.02
الصحف	0.11
الإنترنت	0.19
مصادر أخرى	0.02

A	B	C	D
60%	40%	30%	20%

3 يوضح التمثيل البياني المجاور التوزيع الاحتمالي لعدد الأزهار الحمراء عند زراعة 4 بذور ، فإن $P(0) =$.....



A	B	C	D
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4 ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المبين في الجدول

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

A	B	C	D
0.1	0.16	0.56	2

أكمل الفراغات التالية :

1 دخل 8 لاعبين A, B, C, D, E, F, G, H في مباراة إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا ، فإن احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A, C, E, G على الترتيب $\frac{1}{1680}$ أو $0.06\% \approx$

أوجد حل ما يلي:

أجري اختبار رياضيات لطلاب الصف الثالث ثانوي والجدول يبين نتائج هذا الاختبار .

- بين أن هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًا.
- إذا اختير طالب عشوائيًا فما احتمال ألا يقل تقديره عن B ؟

نتائج اختبار الرياضيات	
التقدير	الاحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

هذه البيانات تمثل توزيعًا احتماليًا لأن احتمال كل قيمة من المتغير العشوائي أكبر من أو يساوي 0 وأصغر من أو يساوي 1 ومجموعها يساوي 1

احتمال ألا يقل تقديره عن B هو 0.72

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 يوضح الجدول المجاور نتائج أحد الاختبارات النهائية العظمى للاختبار 40 فإن البيانات في الجدول تظهر :

فئات الدرجات	عدد الطلاب
13–15	12
16–18	27
19–21	29
22–24	19
25–27	8
28–31	1
32–35	1

A	التواء موجب	B	التواء سالب	C	توزيع طبيعي	D	لا شيء مما سبق

2 إذا توزعت البيانات $\mu = 74, \sigma = 6$ توزيعًا طبيعيًا فإن ..... $P(X > 86) \approx$

A	1.5%	B	2.5%	C	3.5%	D	4.5%

3 عد طلاب قطع الحلوى في 100 علبة صغيرة فوجدوا أن عدد قطع الحلوى لكل علبة يتوزع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي 23 لكل علبة وانحراف معياري يساوي قطعة واحدة فإن عدد العلب التي تحتوي على عدد من قطع الحلوى بين 22, 24 هي :

A	88 تقريبًا	B	80 تقريبًا	C	68 تقريبًا	D	60 تقريبًا

أكمل الفراغات التالية :

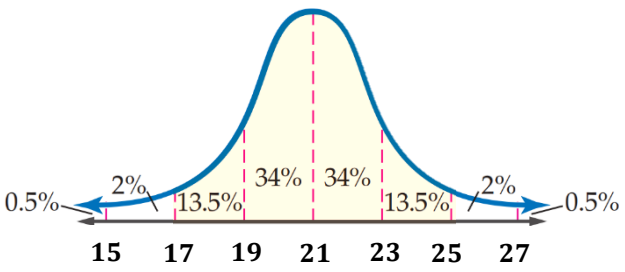
1 تظهر البيانات التالية 14, 15, 11, 13, 13, 14, 15, 14, 12, 13, 14, 15 التواءً سالبًا

2 إذا توزعت البيانات توزيعًا طبيعيًا، فإن $\mu = 13, \sigma = 0.4$ $P(X < 12.6) \approx 16\%$

أوجد حل ما يلي:

أعطى عمران اختبارًا قصيرًا لطلبته البالغ عددهم 50 طالبًا ، وكانت الدرجات موزعة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط حسابي 21 ، و انحراف معياري 2.

- ما العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19 , 23 ؟
- ما احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و 25



العدد التقريبي للطلاب الذين تقع درجاتهم بين 19 , 23

$34\% + 34\% = 68\%$

$50 \times 68\% = 34$ أي 34 طالبًا

احتمال أن تقع درجة أحد الطلاب بين 17 و 25 هو

$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% = 95\%$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 بينت دراسة أن 26% من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم فإن ..... $\mu =$

A		B		C		D	
3.52		2.60		1.92		1.39	

2 بينت دراسة أن 26% من موظفي إحدى الشركات يستعملون الإنترنت في عملهم إذا تم اختيار 10 موظفين من هذه الشركة عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كانوا يستعملون الإنترنت في عملهم فإن ..... $\sigma =$

A		B		C		D	
3.52		2.60		1.92		1.39	

أكمل الفراغات التالية :

1 تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6 ثم ألقي المكعب 10 مرات والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5 تسمى هذه التجربة تجربة ذات حدين

2 ألقيت قطعة نقد 20 مرة ، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة ، فإن $q = \frac{1}{2}$

3 أفادت دراسة إحصائية أن 65% من طلاب الجامعات الذين يمتلكون سيارات يستعملون أحزمة الأمان في أثناء قيادة سياراتهم ، إذا تم اختيار 8 طلاب عشوائيًا ممن يمتلكون سيارات ، وسؤالهم إن كانوا يستعملون أحزمة أمان في أثناء قيادة سياراتهم ، فإن $\sigma^2 \approx 1.82$

أوجد حل ما يلي:

في دراسة حديثة أجريت على خريجي إحدى الكليات تبين أن 78% من الخريجين يخططون لتلقي التدريب العملي بعد التخرج ، تم اختيار 4 خريجين عشوائيًا وسؤالهم عما إذا كان يرغبون في تلقي التدريب العملي بعد تخرجهم ، إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد الخريجين الذين أجابوا بنعم عن السؤال.

- كون توزيع ذات الحدين .
- أوجد احتمال أن 3 منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال .

X	$P(X)$
0	0.002
1	0.033
2	0.177
3	0.418
4	0.370

$P(X \geq 3) = 0.788$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

1 عند أرسال استبانة إلى المدارس الحكومية والخاصة لاستطلاع رأيهم في مادة الرياضيات تكون نوع الدراسة هو .....

A	دراسة تجريبية	B	دراسة مسحية	C	دراسة بالملاحظة	D	ارتباط

2 (اختيار 200 طالب وتقسيمهم عشوائيًا إلى نصفين مع إخضاع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي وعدم إخضاع الأخرى لأي برنامج) تعتبر ...

A	دراسة تجريبية	B	دراسة مسحية	C	دراسة بالملاحظة	D	ارتباط

3 (نريد أن نعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنين يؤثر في سعة الرئة أم لا ..) تعتبر ..

A	دراسة تجريبية	B	دراسة مسحية	C	دراسة بالملاحظة	D	ارتباط

4 في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية اهم ، إن هامش الخطأ لهذه الدراسة ....

A	± 0.001	B	± 0.01	C	± 0.1	D	± 10

5 أجريت دراسة مسحية على 625 شخص قالوا إن 47% من القراءة مفيدة ، أي عينة من الأشخاص قالوا إنها مفيدة جميعهم ...

A	بين 43% و 51%	B	بين 44% و50%	C	بين 40% و50%	D	بين 45% و49%

6 أي مما يلي ليس من مقاييس النزعة المركزية ؟

A	المتوسط الحسابي	B	الوسيط	C	المنوال	D	الانحراف المعياري

7 أي مقاييس النزعة المركزية يناسب بيانات التالية بشكل أفضل : 45 , 53 , 42 , 75 , 47 , 52 , 46 , 15

A	الوسط الحسابي	B	الوسيط	C	التباين	D	المنوال

8 يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين وغير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية ، إذا اختير طالب عشوائيًا .
فما احتمال أن يكون مشاركًا علمًا بأنه في الصف الثالث

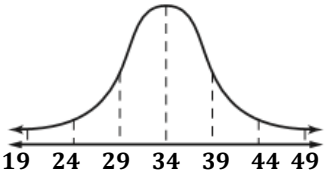
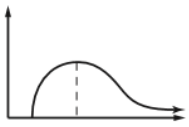
	الصف الثاني	الصف الثالث
مشارك	30	40
غير مشارك	50	80

A	$\frac{3}{5}$	B	$\frac{2}{5}$	C	$\frac{1}{3}$	D	$\frac{1}{5}$

9 يحاول باحث تحديد أثر إضاءة نوع جديد من المصابيح على مجموعة الأزهار ، فقام بتعريض مجموعة منها لإضاءة المصابيح الجديدة والأخرى لإضاءة المصابيح العادية
ويبين الجدول التالي أعداد الأزهار التي عاشت والتي ماتت
فإذا اخترنا زهرة واحدة عشوائيًا .
فما احتمال أن تكون الزهرة قد ماتت علمًا بأنها تعرضت للإضاءة الجديدة .

	إضاءة جديدة	إضاءة عادية
عاشت	24	18
ماتت	6	12

A	20%	B	25%	C	30%	D	40%

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
10	إذا اشترك عبد الله في سباق 400 m مع ثلاثة رياضيين آخرين فإن احتمال أن ينهي عبدالله السباق في المركز الأول يساوي						
	A	25%	B	50%	C	75%	D	100%
11	من الشكل المجاور : المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 						
	A	$\frac{1}{4}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{3}{4}$	D	1
12	مجموعة بيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًا ، فإذا كان وسطها الحسابي 2 و انحرافها المعياري 1 ، فما نسبة أن يكون x أكبر من 3 ؟						
	A	84%	B	97%	C	16 %	D	25%
13	يتوزع عمر 10000 بطارية توزيعًا طبيعًا بوسط 300 يوم ، وانحراف معياري 40 يومًا ، كم بطارية يقع عمرها بين 340 و 260 يومًا ؟						
	A	6800	B	5000	C	3400	D	2500
14	التوزيع الطبيعي المجاور وسطه 34 ، وانحرافه المعياري 5 كم احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًا أقل من 49 ؟ 						
	A	68%	B	87%	C	99.5%	D	100%
15	ما الوصف الأفضل للتمثيل البياني المجاور ؟ 						
	A	ذو التواء موجب	B	ذو التواء سالب	C	يمثل توزيعًا طبيعيًا	D	يمثل توزيعًا متماثلا
16	كسب لاعب 50% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية ، ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة ؟						
	A	$\frac{5}{16}$	B	$\frac{1}{2}$	C	$\frac{3}{5}$	D	1
17	في تجربة ذات حدين : إذا كان احتمال النجاح 35% ، وعدد المحاولات 4 فإن الوسط يساوي						
	A	1.3	B	1.4	C	1.5	D	1.6
18	في حادثة ذات حدين كان عدد المحاولات 20 ، وكان الوسط 12 ، كم ستكون قيمة الانحراف المعياري ؟						
	A	$\sqrt{4.8}$	B	1.2	C	$\sqrt{1.2}$	D	4.8
19	اخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشر القادمة 40% ، إن التباين يساوي						
	A	$\sqrt{2.4}$	B	2.4	C	4	D	6

ملحق الإجابات

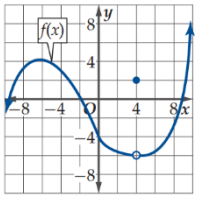
الفصل الرابع

النهايات والاشتقاق

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

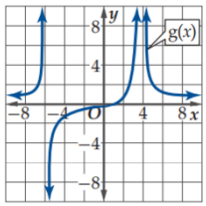
1 من التمثيل البياني المجاور



قيمة $\lim_{x\to -4} f(x) =$ .....

A	-6	B	2	C	3	D	4

2 من التمثيل البياني المجاور



قيمة $\lim_{x\to 4} g(x) =$ .....

A	∞	B	8	C	0	D	$-\infty$

أكمل الفراغات التالية :

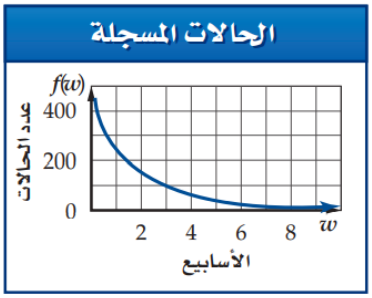
1 $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x - x}{x} = 0$

2 $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = -1$

أوجد حل ما يلي:

تم توزيع لقاح للحد من عدوى مرض ما ، ويبين التمثيل البياني أدناه عدد حالات الإصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح .

- استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to 1} f(w), \lim_{w\to 3} f(w)$.
- استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w\to \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة وفسر النتيجة .



$\lim_{w\to 1} f(w) = 250$ ، $\lim_{w\to 3} f(w) = 100$

$\lim_{w\to \infty} f(w) = 0$ سيقضي اللقاح على العدوى مع مرور الزمن .

اختبر نفسك

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 — $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{x+1}-1}=\ldots\ldots\ldots$

A		B		C		D	
∞		8		2		غير موجودة	

2 — $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 2x}{x}=\ldots\ldots\ldots$

A		B		C		D	
∞		1		0		غير موجودة	

3 — نهاية المتتابعة $a_n=\dfrac{-4n^2+6n-1}{n^2+3n}$

A		B		C		D	
4		3		-3		-4	

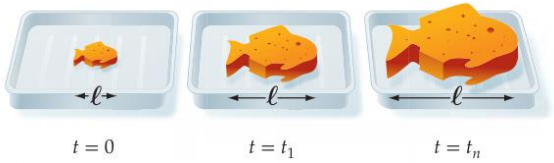
أكمل الفراغات التالية :

1 — $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2-x}=$ غير موجودة

2 — $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-10x+2}{4x^3+20x^2}=\dfrac{3}{4}$

أوجد حل ما يلي:

تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج ، وعند وضع المادة الهلامية في الماء ، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء ، والتضخم ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t)=\dfrac{105t^2}{10+t^2}+25$ حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالمليمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء .



- ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه بالماء ؟
- ما نهاية الدالة عندما $t\to\infty$ ؟
- وضح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج .

طول حيوان الإسفنج قبل وضعه بالماء $= 25$ mm

$$\lim_{t\to\infty}\ell(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{105t^2}{10+t^2}+25\right)=130\text{ mm}$$

العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج :
إن طول حيوان الإسفنج لن يتعدى 130 mm

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2 - 5x$ عند النقطة $(1, -4)$ يساوي .....

A		B		C		D	
5		1		-3		-4	

2 السرعة المتوسطة المتجهة لجسم ما بالميل لكل ساعة ، بعده عن نقطة ثابتة $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$ في الفترة الزمنية $3 \le t \le 5$ ، تساوي تقريبًا .....

A		B		C		D	
45 mi/h		65 mi/h		55 mi/h		60 mi/h	

3 معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما عند اي زمن بمسافة يقطعها الجسم $s(t) = t - 3t^2$ هي :

A		B		C		D	
$v(t) = 1 - 9t$		$v(t) = -6t$		$v(t) = -3t$		$v(t) = 1 - 6t$	

أكمل الفراغات التالية :

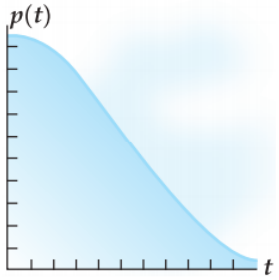
1 معادلة ميل منحنى الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ عند اي نقطة عليه $m = \frac{-2}{x^3}$

2 السرعة المتجهة اللحظية لجسم ما، بعده عن نقطة ثابته $f(t) = 38t - 16t^2$ ، بزمن $t = 0.8$ تساوي $12.4\ \text{ft/s}$

أوجد حل ما يلي:

تمثل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي

بعد t ثانية من انطلاقه .



- أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن .
- أوجد الميل عند $t = 2\ s, 5\ s, 7\ s$.

معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن :

$m = 0.18t^2 - 2.16t$

الميل عند $t = 2\ s$ -3.6

الميل عند $t = 5\ s$ -6.3

الميل عند $t = 7\ s$ -6.3

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 مشتقة الدالة $g(x) = -x^2 + 2x + 11$ عند النقطة $x = 3$ تساوي :

A		B		C		D	
5		1		-3		-4	

2 النقاط الحرجة للدالة $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k$ في الفترة $[0\ ,3]$

A		B		C		D	
$(1,-1)$		$(-1,-1)$		$(1,1)$		$(0,1)$	

3 مشتقة الدالة $f(x) = (-7x + 4)(2 - x)$ هي :

A		B		C		D	
-18		$14x - 10$		$14x - 18$		$-14x - 18$	

أكمل الفراغات التالية :

1 مشتقة الدالة $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$ $\quad n'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^3} - \frac{6}{t^4}$

2 مشتقة الدالة $f(m) = \frac{3-2m}{3+2m}$ $\quad f'(m) = \frac{-12}{(3+2m)^2}$

أوجد حل ما يلي:

تعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة :

$$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$$

حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم .

- أوجد معادلة تمثل معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة .
- أوجد معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة عندما $h = 2$.
- أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة $0 \le h \le 24$.

معادلة تمثل معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة :

$$f'(h) = -0.0108h^2 - 0.02h + 2.04$$

معدل التغير اللحظي لدرجة الحرارة عندما $h = 2$

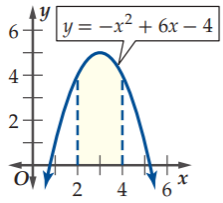
$$f'(2) \approx 1.96°\text{F}$$

درجة الحرارة العظمى في الفترة $0 \le h \le 24$ هي: $68.92°\text{F}$

اختبر نفسك

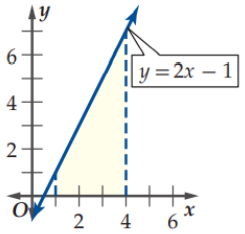
اختر الإجابة الصحيحة :

1 — المساحة التقريبية للمنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في الشكل مستعملًا 4 مستطيلات في الطرف الأيسر تساوي تقريبًا .....



A		B		C		D	
7.25 وحدة مربعة		8.25 وحدة مربعة		9.25 وحدة مربعة		10.25 وحدة مربعة	

2 — بعد تقريب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة في الشكل المجاور الأطراف اليمنى ثم اليسرى حيث عرض المستطيل يساوي 0.5 فإن الوسط للتقريبين بالوحدة المربعة هو :



A		B		C		D	
8		10		12		14	

3 — مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد $\int_1^3 (2x^2 + 3)dx$ تساوي تقريبًا .....وحدة مربعة.

A		B		C		D	
23.33		24.33		26.67		27.33	

أكمل الفراغات التالية :

1 — $\int_1^3 12x\,dx = 48$

2 — $\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) dx = 3.75$

أوجد حل ما يلي:

تطبع مطبعة 1000 كتاب يوميًا إذا زاد عدد الكتب المطبوعة من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب

- أوجد قيمة التكلفة بالريال لـ الزيادة المعطاة بالتكامل :

$$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\,dx$$

قيمة تكلفة الزيادة تساوي 3750 ريالًا .

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة :

1 الدالة الأصلية للدالة $f(z)=\sqrt[3]{z}$ هي :

A	B	C	D
$\frac{5}{3}z^{\frac{3}{5}}+C$	$\frac{4}{3}z^{\frac{4}{3}}+C$	$\frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}}+C$	$\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}+C$

2 قيمة التكامل : $\int_{-1}^{2}(-x^2+10)dx$ تساوي :

A	B	C	D
20	27	30	37

3 قيمة التكامل $\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{2}h^2+\frac{2}{3}h^3-\frac{1}{5}h^4\right)dh$ تساوي :

A	B	C	D
6.99	7.99	8.99	9.99

أكمل الفراغات التالية :

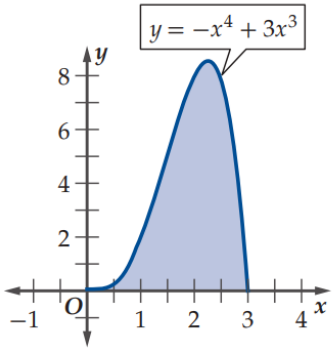
1 $\int_{2}^{5}(a^2-a+6)da=$ **46.5**

2 الدالة الأصلية للدالة $m(t)=16t^3-12t^2+20t-11$ هي
$M(t)=4t^4-4t^3+10t^2-11t+C$

أوجد حل ما يلي:

يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه ، حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي .

- ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعاراً إذا كانت x بالبوصات ؟

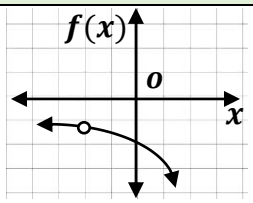
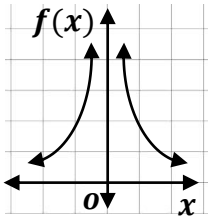
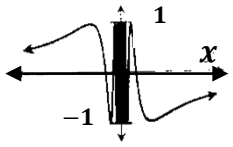


$$\int_{0}^{3}(-x^4+3x^3)\,dx=12.15$$

مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعاراً إذا كانت x بالبوصات:

$$12.15\times 50=607.5\ \text{in}^2$$

اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :								
1	في الشكل المجاور : نقدر $\lim_{x\to -2} f(x)$ 							
	A	-2	B	-1	C	0	D	غير موجودة
2	في الشكل المجاور : نقدر $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ بـ ..... 							
	A	$-\infty$	B	0	C	$+\infty$	D	غير موجودة
3	في الشكل المجاور : نقدر $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ ..... $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 							
	A	$-\infty$	B	0	C	$+\infty$	D	غير موجودة
4	النهاية $\lim_{x\to 4}(4x-1)$ تساوي							
	A	4	B	8	C	12	D	15
5	ما قيمة $\lim_{x\to 0}(4^x-\cos x+2x-1)$							
	A	-2	B	-1	C	1	D	2
6	ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+6}{x-1}$							
	A	4	B	0	C	-2	D	-4
7	ما قيمة $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$							
	A	$3+\sqrt{7}$	B	$3-\sqrt{7}$	C	$\sqrt{7}-3$	D	3
8	ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$							
	A	0	B	6	C	4	D	8
9	$\lim_{x\to -1}\frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي							
	A	$\frac{1}{8}$	B	$\frac{1}{12}$	C	∞	D	0
10	$\lim_{x\to\infty}(x^2+x+2)$ تساوي							
	A	$-\infty$	B	0	C	1	D	∞
11	ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-12x}{5+3x^2-2x^3}$							
	A	-5	B	-2	C	2	D	5

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :							
12	أوجد k إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2+kx^3}{5-2x+3x^3}=1$						
	A	-4	B	-3	C	3	D	5
13	إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^2}{3+x\lvert x\rvert}=2$ فما قيمة A ؟						
	A	6	B	2	C	-2	D	-6
14	إذا كانت $f(x)=\sqrt{7}$ فإن $f'(x)$ تساوي						
	A	$\sqrt{7}$	B	$\frac{1}{2}\sqrt{7}$	C	0	D	$\frac{1}{2\sqrt{7}}$
15	إذا كانت $f(x)=3x^2-5x+12$ فإن مشتقة الدالة $f(x)$ تساوي						
	A	$3x-5$	B	$6x^2-5$	C	$6x^2-5x$	D	$6x-5$
16	ما معادلة ميل المنحنى $y=x^5+3x-2$ عند أي نقطة عليه ؟						
	A	$5x^4+3$	B	$4x^4+3x$	C	x^4+1	D	x^4+3
17	إذا كانت $g(x)=\sqrt[5]{x^9}$ فإن $g'(x)$ تساوي						
	A	$9\sqrt[5]{x^8}$	B	$5\sqrt[4]{x^9}$	C	$\frac{5}{9}\sqrt[5]{x^4}$	D	$\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$
18	ما المشتقة السادسة للدالة التالية : $f(x)=\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+7x-12$						
	A	-1	B	0	C	1	D	3
19	إذا كانت $f_1(x)=\sin x$ و $f_2(x)=\cos x$ ، وكانت المشتقة الأولى للدالة المثلثية $\sin x$ هي $\cos x$ والمشتقة الأولى للدالة المثلثية $\cos x$ هي $-\sin x$ ؛ فإن المشتقة الأولى لحاصل الضرب $f_1(x).f_2(x)$ يساوي						
	A	$\sin^2 x$	B	$\sin^2 x+\cos^2 x$	C	$-\cos^2 x$	D	$\cos^2 x-\sin^2 x$
20	يستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد النقاط العظمى والصغرى لأي دالة $f(x)$ على النحو التالي : إذا كانت $\frac{df(a)}{dx}=0$ و $\frac{d^2f(a)}{dx^2}>0$ فالدالة f لها نقطة صغرى عند a ، وإذا كانت $\frac{df(b)}{dx}=0$ و $\frac{d^2f(b)}{dx^2}<0$ فالدالة f لها نقطة عظمى عند b ، وبناءً على ذلك ما النقاط العظمى (على الترتيب) للدالة $f(x)=2+3x-x^3$ ؟						
	A	$+1\,,-1$	B	$-1\,,+1$	C	$+3\,,-3$	D	$-3\,,+3$
21	إذا كانت $f(x)=6x^2-x^3$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[0\,,3]$ ؟						
	A	64	B	32	C	27	D	21
22	تعطى المسافة التي يتحركها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $f(x)=18t-2t^2-1$ أوجد معادلة السرعة اللحظية لهذا الجسم ؟						
	A	$18t-4$	B	$18-4t$	C	$4t$	D	$2t-1$
23	إذا كانت $F(x)=2x^5-x^3-102$ فإن : $f'(1)$ تساوي						
	A	-102	B	-39	C	-7	D	7

مسائل إضافية

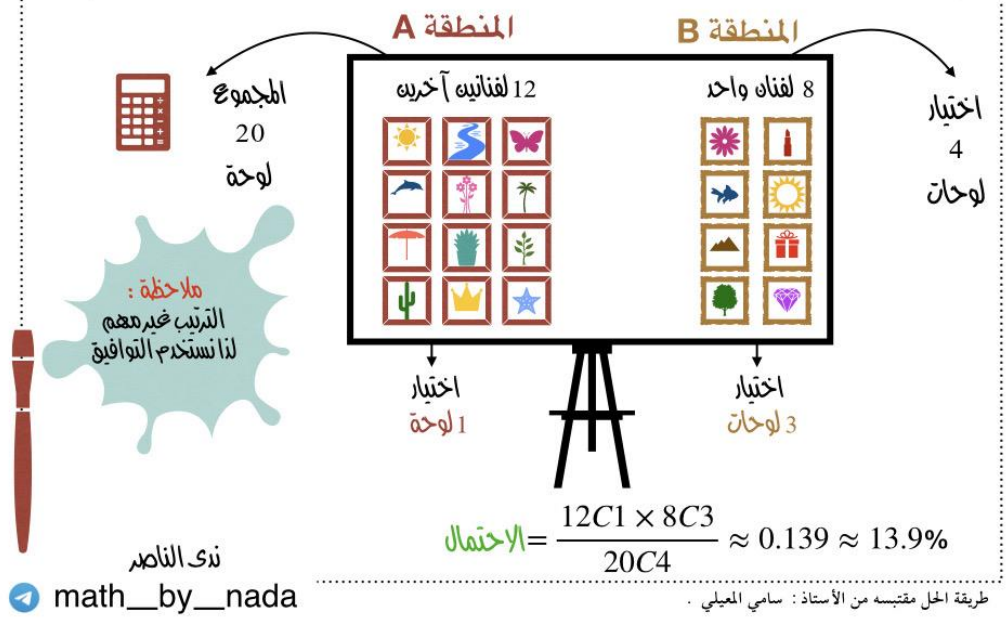
الفصل الثالث

الاحتمال والإحصاء

الاحتمال باستعمال التوافيق

الاحتمال باستعمال التوافيق – رياضيات ٦

اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة ؛ لعرضها في أحد المعارض . ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف ؟



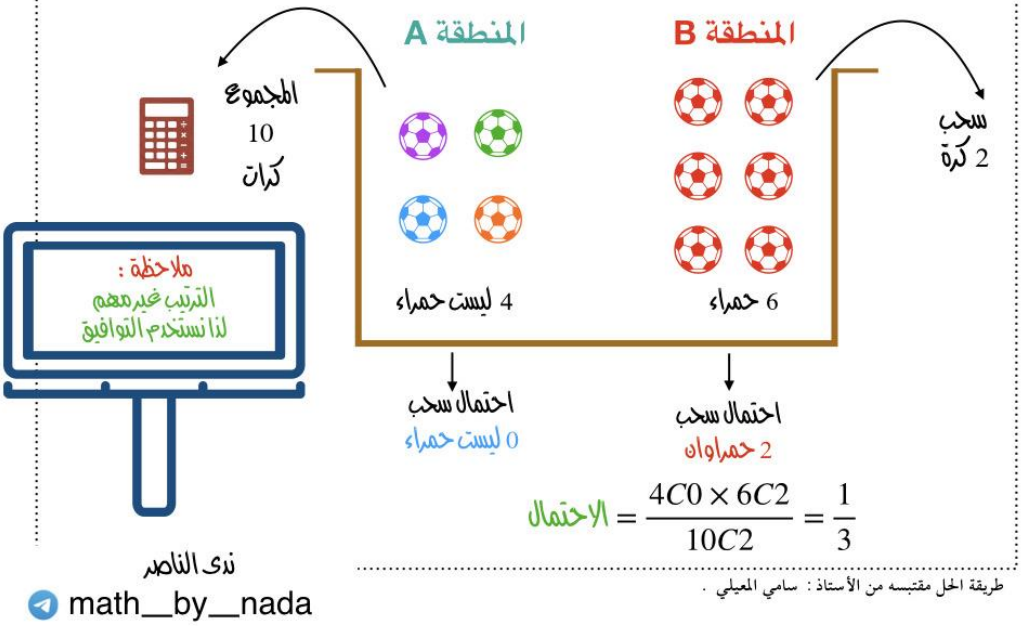
$$\text{الاحتمال} = \frac{12C1 \times 8C3}{20C4} \approx 0.139 \approx 13.9\%$$

طريقة الحل مقتبسة من الأستاذ : سامي المعيلي .

ندى الناصر
math__by__nada

الاحتمال باستعمال التوافيق – رياضيات ٦

صندوق فيه 10 كرات ، منها 6 حمراء ، إذا سحبت منه كرتان معًا عشوائيًا ، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين ؟



$$\text{الاحتمال} = \frac{4C0 \times 6C2}{10C2} = \frac{1}{3}$$

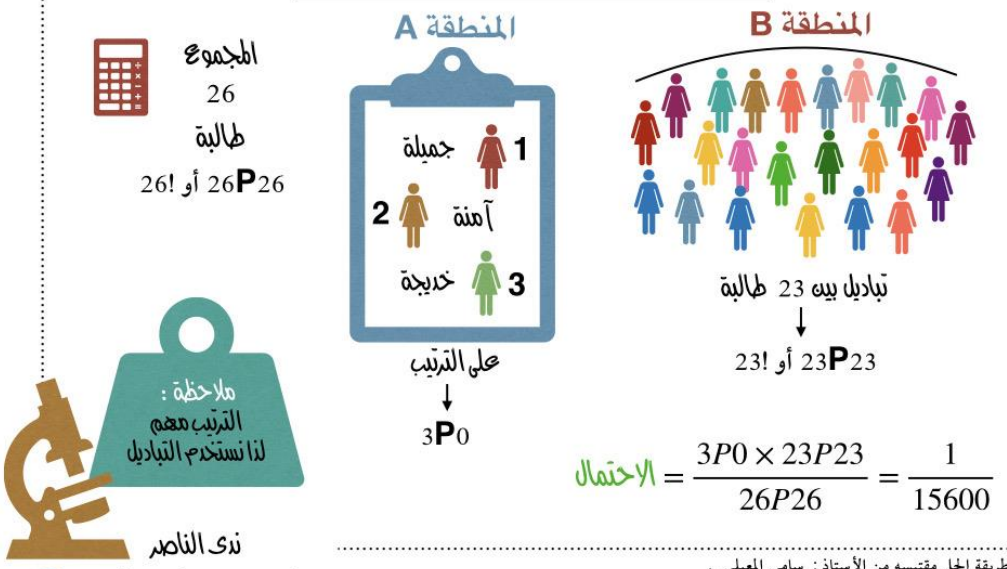
طريقة الحل مقتبسة من الأستاذ : سامي المعيلي .

ندى الناصر
math__by__nada

الاحتمال باستعمال التباديل

الاحتمال باستعمال التباديل - رياضيات ٦

دخلت طالبات صف وعددهن 26 إلى مختبر المدرسة . إذا اختارت المعلمة أسماء الطالبات عشوائيًا لتشكل مجموعات للعمل ، فما احتمال أن تكون أول ثلاث طالبات ذُكرت أسماؤهن جميلة وآمنة وخديجة على الترتيب ؟



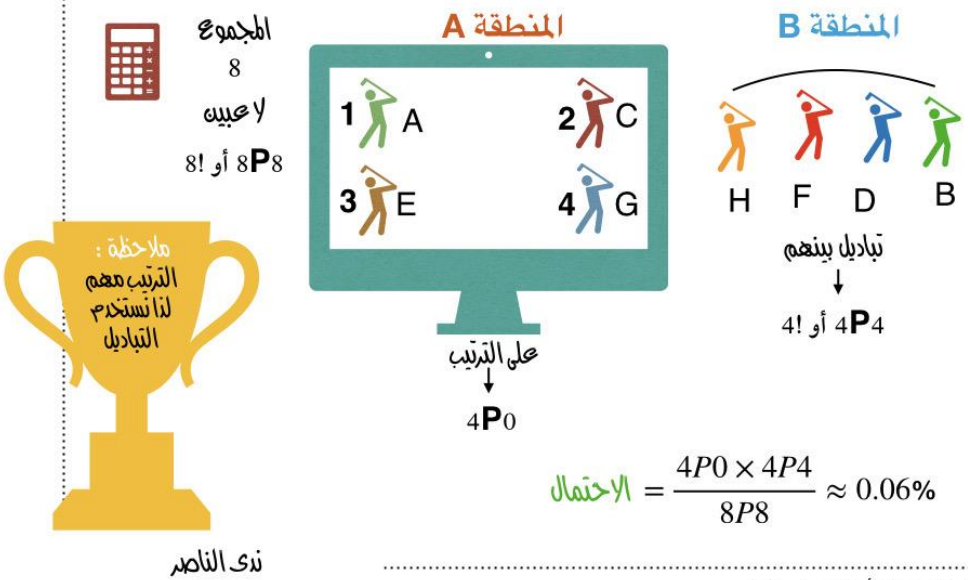
$$\text{الاحتمال} = \frac{3P0 \times 23P23}{26P26} = \frac{1}{15600}$$

طريقة الحل مقتبسة من الأستاذ : سامي المعيلي .

ندى الناصر
math__by__nada

الاحتمال باستعمال التباديل - رياضيات ٦

دخل 8 لاعبين A , B , C , D , E , F , G , H في مباراة ،إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًا ، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A , C , E , G على الترتيب ؟



$$\text{الاحتمال} = \frac{4P0 \times 4P4}{8P8} \approx 0.06\%$$

طريقة الحل مقتبسة من الأستاذ : سامي المعيلي .

ندى الناصر
math__by__nada

المراجع

رياضيات ٦ التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية).

وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٩هـ

العبد الكريم ، ناصر عبد العزيز ناصر

التحصيلي للتخصصات العلمية – بنين وبنات ./ ناصر عبد العزيز ناصر العبدالكريم - ط٥ - الرياض ، ١٤٤٠هـ

الصور التعبيرية www.pinterest.com

جميع الحقوق محفوظة

التصميم والتنسيق :

ندى محمد الناصر

تصمم الغلاف :

الأستاذ: توفيق علي زكري

المؤلفات :

ندى محمد الناصر

@nada_mn_

جواهر حمدان العنزي

@Jwaher_H5

المراجعين :

هند علي العديني

@H__Ali1

علي محمد القرني

@a3loooshe2015

الفهرس

الفصل الأول
المتجهات

- مقدمة في المتجهات 6
- المتجهات في المستوى الإحداثي 11
- الضرب الداخلي 18
- المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد 22
- الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي 28
- أسئلة تحصيلي 32

الفصل الثاني
الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

- الإحداثيات القطبية 35
- الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات 40
- الأعداد المركبة ونظرية ديموافر 43
- أسئلة تحصيلي 49

الفهرس

الفصل الثالث
الاحتمال والإحصاء

- الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة 51
- التحليل الإحصائي 54
- الاحتمال المشروط 58
- الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية 60
- التوزيع الطبيعي 64
- التوزيعات ذات الحدين 67
- أسئلة تحصيلي 71

الفصل الرابع
النهايات والاشتقاق

- تقدير النهايات بيانيًا 74
- حساب النهايات جبريًا 79
- المماس والسرعة المتجهة 84
- المشتقات 87
- المساحة تحت المنحى والتكامل 91
- النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل 95
- أسئلة تحصيلي 98